RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* VIII. *Soluzioni binarie di Weyl.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

In una Memoria pubblicata nell'agosto 1917 (1), il sig. Weyl ebbe la felice idea di prendere in considerazione quella classe di problemi della statica einsteiniana, in cui tutte le incognite si possono far dipendere da due sole coordinate, essendo inoltre soddisfatta una certa condizione di ortogonalità. Tale classe è particolarmente notevole per la sua generalità, potendo (mediante quadrature e operazioni in termini finiti) essere posta in corrispondenza biunivoca cogli ordinarî potenziali simmetrici, di cui costituisce l'analogo einsteiniano.

A questa stessa categoria di soluzioni ero pervenuto per mio conto alquanto più tardi, come esempio cospicuo di quel tipo generale B_1) (cfr. Nota II, § 6) (2), in cui lo spazio fisico si atteggia a varietà normale del Bianchi (con curvature principali distinte). Avendo in seguito conosciuta, per gentile invio dell'Autore, la ricerca di Weyl e rilevato che egli mi aveva preceduto nell'idea, e, sebbene per via diversa, nei risultati principali, pensavo di non pubblicare il mio studio, o tutt'al più di limitarmi a segnalare un'applicazione elementare meritevole di interesse perchè rispecchia il campo dovuto all'attrazione di una retta indefinita. Ma una più

(1) Ann. der Physik, B. 54, pp. 117-145.

(2) In questi Rendiconti, vol. XXVII (1° semestre 1918), pp. 3-12.

attenta lettura del lavoro di Weyl mi ha mostrato che la sua deduzione è incompleta (cfr. in proposito il § 5 del presente scritto). Egli tien conto soltanto di tre equazioni, che, in certo senso, sono effettivamente le più importanti, ma non esauriscono il sistema cui si riducono nel caso considerato le equazioni della statica einsteiniana. Questo sistema è costituito da cinque equazioni (una delle quali risulta conseguenza differenziale delle altre). Per un singolare compenso il Weyl aggiunge alle sue tre equazioni una condizione qualitativa che rende il grado di arbitrarietà eguale a quello del sistema completo. E il risultato finale è corretto, tranne per quanto concerne una delle incognite (la nostra λ, ivi designata con γ).

Stando così le cose, mi permetto di rendere di pubblica ragione il mio procedimento. Riservo ad altra prossima comunicazione una breve illustrazione geometrica e l'esempio cui sopra accennai.

1. — Definizione e caratterizzazione intrinseca.

Si tratta di assegnare i ds^2 statici, e quindi del tipo

$$V^2 dt^2 - dl^2 ,$$

che convengono ad uno spazio vuoto (tensore energetico nullo) sotto le due ipotesi addizionali seguenti:

1°) i coefficienti dipendono esclusivamente da due sole coordinate, diciamo x_1 , x_2;

2°) il dl^2 ha forma ortogonale rispetto alla terza coordinata x_3.

Posto al solito

$$V = V_0 e^{\nu} , \tag{1}$$

con V_0 costante di omogeneità e $\nu(x_1 , x_2)$ puro numero, conviene in primo luogo (come apparirà dallo sviluppo successivo del calcolo) assumere il dl^2 sotto la forma

$$dl^2 = e^{-2\nu} dl'^2 , \tag{2}$$

dove il dl'^2 ottempera ancora alle condizioni imposte al dl^2, ed è quindi del tipo

$$dl'^2 = d\sigma^2 + r^2 dx_3^2 , \tag{3}$$

con $d\sigma$ elemento lineare binario, ed r funzione, *a priori* indeterminata, di x_1 , x_2. Circa le dimensioni, è ben chiaro che (in una forma differenziale quadratica la quale esprime il quadrato di un elemento lineare) quando le variabili indipendenti si risguardano lunghezze, i coefficienti riescono puri numeri. Tale convenzione intenderemo adottata riguardo al $d\sigma$; mentre considereremo x_3 come un parametro di dimensioni nulle (per es. un angolo) e dovremo in conformità attribuire ad r le dimensioni di una lunghezza.

Va notato altresì che le due ipotesi poc'anzi enunciate sotto aspetto formale sono interpretabili intrinsecamente nella metrica definita dal dl^2. *La prima* (indipendenza dei coefficienti da x_3) *sta ad esprimere che lo spazio ammette un gruppo* ∞^1 *di movimenti rigidi*, definito dalla trasformazione infinitesima $\frac{\partial}{\partial x_3}$. *La seconda equivale* all'esistenza di superficie (le $x_3 = \text{cost.}$) che tagliano ortogonalmente le traiettorie del gruppo ($x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$), ossia *alla normalità della congruenza costituita dalle traiettorie del gruppo.*

2. — Forma binaria delle equazioni di Einstein.

Le derivate seconde covarianti di una generica funzione V, riferite ad un assegnato dl^2, e i simboli di Ricci α_{ik}, spettanti ad esso dl^2, si sanno riportare ad un dl'^2 in corrispondenza conforme (2) col dl^2, e successivamente, in base alla (3), al $d\sigma^2$ binario cui si associ la funzione r (cfr. §§ 3 e 4 della Nota III).

In primo luogo (dalle formole (5) della detta Nota, scambiando i simboli accentati con quelli non accentati e ponendo $\tau = -\nu$) si ha

$$\frac{V_{ik}}{V} = \nu'_{ik} + 3\nu_i\nu_k - a'_{ik}\Delta'\nu \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{4}$$

dove le derivate covarianti ν'_{ik}, i coefficienti a'_{ik} e il parametro Δ' si riferiscono al dl'^2.

Dacchè, in base alla (2), gli elementi reciproci ai coefficienti del dl^2 valgono $e^{2\nu}a'^{(ik)}$, si ha, come conseguenza formale delle (4),

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = e^{2\nu}\Delta'_2\nu .$$

Siccome una delle equazioni di Einstein può essere posta sotto la forma $\Delta_2 V = 0$, così possiamo intanto ritenere acquisito che

$$\Delta'_2\nu = 0. \tag{5}$$

E ciò giova a semplificare le espressioni [(13) della Nota III, per $\tau = -\nu$] delle α_{ik} in funzione delle α'_{ik}, che si scrivono

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} - \nu'_{ik} - \nu_i\nu_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Prima di fare il secondo passo, cioè il riferimento al $d\sigma^2$ binario, ricordiamo che le equazioni fondamentali della statica einsteiniana (negli spazî vuoti) sono sette, di cui una può essere rappresentata da $\Delta_2 V = 0$,

ossia dalla (5), e le altre sei si scrivono

$$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{7}$$

In base alle (4) e (6), queste assumono l'aspetto

$$\alpha'_{ik} + 2\nu_i \nu_k - a'_{ik}\,\Delta'\nu = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{7'}$$

Badiamo ora alla (3), notando anzi tutto che, se il $d\sigma^2$ binario ha l'espressione generica

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

si hanno i coefficienti a'_{ik} del $dl'^2 = d\sigma^2 + r^2 dx_3^2$ e i loro reciproci $a'^{(ik)}$ sotto la forma

$$\begin{cases} a'_{ik} = a_{ik} \;,\; a'_{i3} = 0 \;,\; a'_{33} = r^2 \;; \\ a'^{(ik)} = a^{(ik)} \;,\; a'^{(i3)} = 0 \;,\; a'^{(33)} = \dfrac{1}{r^2} \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2). \tag{8}$$

Con ciò, per una funzione qualsiasi indipendente da x_3, risulta $\Delta' = \Delta$, quindi in particolare

$$\Delta'\nu = \Delta\nu . \tag{9}$$

Quanto alle derivate seconde ν'_{ik}, esse si identificano colle corrispondenti ν_{ik} (relative al $d\sigma^2$) per $i, k = 1, 2$, e si ha complessivamente (formule (21) della Nota III, per ν indipendente da x_3)

$$\nu'_{ik} = \nu_{ik} \;(i, k = 1, 2) \;,\; \nu'_{i3} = 0 \;,\; \nu'_{33} = r\nabla(r, \nu) . \tag{10}$$

Ne deduciamo in particolare

$$\Delta'_2\nu = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a'^{(ik)}\nu_{ik} = \Delta_2\nu + \frac{1}{r}\nabla(r, \nu) . \tag{11}$$

Le espressioni dei simboli di Ricci α'_{ik}, riportate al $d\sigma^2$ e alla funzione associata r, sono [Nota III, formule (19)]

$$\alpha'_{ik} = \frac{r_{ik}}{r} - a_{ik}\frac{\Delta_1 r}{r} \;(i, k = 1, 2) \;,\; \alpha'_{i3} = 0 \;,\; \alpha'_{33} = r^2 K , \tag{12}$$

designando K la curvatura gaussiana del $d\sigma^2$.

Teniamo conto di quanto precede [formule (8)-(12)] nelle equazioni gravitazionali, cioè nella (5) e nelle (7').

La prima, in base alla (11), diviene

$$\Delta_2 \nu + \frac{1}{r} \nabla(r, \nu) = 0 . \tag{13}$$

Delle (7′) due rimangono identicamente soddisfatte (quelle in cui uno, ed un solo, indice ha il valore 3); una ($i = k = 3$) si riduce a

$$K = \Delta \nu , \tag{14}$$

e le rimanenti tre assumono l'aspetto

$$\frac{r_{ik}}{r} + 2\nu_i \nu_k - a_{ik}\left(\frac{\Delta_2 r}{r} + \Delta\nu\right) = 0 \qquad (i, k = 1, 2),$$

covariante rispetto al $d\sigma^2$.

Da esse, moltiplicando per $a^{(ik)}$ e sommando, segue

$$\Delta_2 r = 0 ,$$

con che si può scrivere più semplicemente

$$\frac{r_{ik}}{r} + 2\nu_i \nu_k - a_{ik}\Delta\nu = 0 \qquad (i, k = 1, 2): \tag{15}$$

in queste equazioni seguita naturalmente ad essere implicita come necessaria conseguenza la $\Delta_2 r = 0$.

Il sistema da integrare consta pertanto delle cinque equazioni (13), (14), (15), *nelle quali figurano come elementi incogniti le funzioni* r *e* ν, *e la forma binaria* $d\sigma^2$, *che funge da forma fondamentale, essendo a essa riferiti derivate covarianti e parametri.*

Giova ancora prepararsi le espressioni, involgenti unicamente r, ν e $d\sigma^2$, che competono alle α_{ik} del dl^2 spaziale: ciò col manifesto intendimento di valersene a suo tempo pel calcolo delle curvature principali. Tutto si riduce, in virtù delle equazioni gravitazionali (7), che dànno

$$\alpha_{ik} = -\frac{V_{ik}}{V} ,$$

ad introdurre nei secondi membri delle (4) le espressioni (10) delle ν'_{ik}, badando altresì alle (8) e (9). Si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_{ik} = -\nu_{ik} - 3\nu_i \nu_k + a_{ik}\Delta\nu \quad (i, k = 1, 2) , \\ \alpha_{i3} = 0 \quad , \quad \alpha_{33} = r^2\left\{\Delta\nu - \frac{1}{r}\nabla(r, \nu)\right\} . \end{cases} \tag{16}$$

3. — Forma isometrica del $d\sigma^2$. Ulteriore trasformazione delle equazioni gravitazionali.

Per l'armonicità di r rispetto al $d\sigma^2$ ($\Delta_2 r = 0$), esiste la funzione associata z (determinata a meno di una inessenziale costante additiva), armonica anch'essa, *indipendente da* r [1] e dotata delle stesse dimensioni, quindi omogenea ad una lunghezza.

Il $d\sigma^2$, espresso per r e z, assume notoriamente la forma isometrica

$$d\sigma^2 = e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2), \tag{17}$$

dove λ è una funzione, *a priori* incognita, di r e di z, legata alla curvatura gaussiana K dalla relazione

$$K = -\Delta_2 \lambda = -e^{-2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right). \tag{18}$$

Più comprensivamente, seguitando per un momento ancora a lasciar generiche le variabili indipendenti, potremo ritenere la (17) sotto la forma

$$d\sigma^2 = e^{2\lambda}\, d\sigma_0^2 \tag{17'}$$

con $d\sigma_0$ elemento lineare euclideo.

Prima di procedere all'integrazione del sistema (13), (14), (15), si rende opportuna un'ultima trasformazione, che riporti, in tutte le formule, derivate covarianti e parametri al $d\sigma_0^2$ euclideo.

Detti a_{ik}^0 i coefficienti di questo $d\sigma_0^2$, si ha dalla (17') $a_{ik} = e^{2\lambda}\, a_{ik}^0$; inoltre (invocando qui ancora le formule (5) della Nota III):

$$\begin{cases} \dfrac{r_{ik}}{r} = \dfrac{r_{ik}^0}{r} - \dfrac{r_i}{r}\lambda_k - \dfrac{r_k}{r}\lambda_i + \dfrac{1}{r}\nabla^0(r, \lambda)\, a_{ik}^0, \\ \nu_{ik} = \nu_{ik}^0 - \nu_i \lambda_k - \nu_k \lambda_i + \nabla^0(\nu, \lambda)\, a_{ik}^0 \qquad (i, k = 1, 2); \\ \nabla = e^{-2\lambda}\nabla^0 \quad , \quad \Delta = e^{-2\lambda}\Delta^0 \quad , \quad \Delta_2 = e^{-2\lambda}\Delta_2^0, \end{cases} \tag{19}$$

dove sono contrassegnati con ^{0} gli elementi che si riferiscono al $d\sigma_0^2$.

[1] Questa affermazione cadrebbe in difetto soltanto se r fosse costante. Ma si può *a priori* escludere tale eventualità, badando alle equazioni (15). Infatti, per r costante, queste implicherebbero proporzionalità fra i coefficienti a_{ik} del $d\sigma^2$ e i prodotti $\nu_i \nu_k$, e quindi l'annullamento del discriminante, il che è da escludere, trattandosi di forma definita positiva.

Con ciò, le (13), (14), (15), avendo anche cura di sostituire a K la sua espressione (18), $-\Delta_2\lambda = -e^{-2\lambda}\Delta_2^0\lambda$, assumono l'aspetto

$$\Delta_2^0 \nu + \frac{1}{r}\nabla(r\,,\,\nu) = 0\,, \tag{13'}$$

$$\Delta_2^0 \lambda = -\Delta^0 \nu\,, \tag{14'}$$

$$\frac{r_{ik}^0}{r} - \frac{r_i}{r}\lambda_k - \frac{r_k}{r}\lambda_i + 2\nu_i\nu_k - a_{ik}^0\left\{\Delta^0\nu - \frac{1}{r}\nabla^0(r\,,\,\lambda)\right\} = 0 \tag{15'}$$

$$(i\,,\,k = 1\,,\,2)\,.$$

4. — Particolarizzazione delle variabili indipendenti. Integrazione e forme canoniche.

Finora ci siamo occupati di cambiare la forma fondamentale, in modo che questa è divenuta il $d\sigma_0^2$ euclideo. Ma non abbiamo peranco introdotta alcuna specificazione delle variabili indipendenti $x_1\,,\,x_2$, sicchè le formule precedenti valgono in coordinate qualunque.

Per agevolare l'integrazione, giova però riferirsi a coordinate cartesiane (rispetto al nostro $d\sigma_0^2 = dr^2 + dz^2$), assumendo $x_1 = r\,,\,x_2 = z$. Con tali variabili indipendenti, $a_{ik}^0 = \varepsilon_{ik}$; le derivate covarianti coincidono con le derivate ordinarie, l'indice 1 significando derivazione parziale rapporto ad r e l'indice 2 derivazione parziale rapporto a z; $r_1 = 1\,,\,r_2 = 0\,,\,r_{ik}^0 = 0$ $(i\,,\,k = 1\,,\,2)$; ecc.

La (13') assume così la forma esplicita:

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\nu}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} = 0\,, \tag{20}$$

in cui si ravvisa la nota equazione che definisce i potenziali simmetrici dello spazio ordinario in coordinate cilindriche.

Dunque, in primo luogo, *l'incognita* $\nu(r\,,\,z)$ *è un potenziale simmetrico*. Soddisfatta che sia questa condizione, le (15') risultano, come tosto verificheremo, compatibili e atte a individuare λ mediante una quadratura.

Per riconoscerlo, facciamo successivamente coincidere, nelle (15'), la coppia $(i\,,\,k)$ con $(1\,,\,1)$, $(2\,,\,2)$ e $(1\,,\,2)$.

Le prime due equazioni riescono coincidenti, sicchè si ricava

$$\lambda_1 = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\quad,\quad \lambda_2 = 2r\nu_1\nu_2\,, \tag{21}$$

le quali si compendiano in

$$d\lambda = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\,dr + 2r\nu_1\nu_2\,dz\,. \tag{21'}$$

In virtù della (20), il secondo membro risulta, come si constata immedia-

tamente, un differenziale esatto, sicchè le (21) sono compatibili, e *la determinazione di λ richiede unicamente una quadratura.*

Quanto alla (14′) (che si presenta a primo aspetto come una ulteriore condizione imposta alla λ), essa rimane identicamente soddisfatta, purchè vi si introducano per λ_1 , λ_2 le espressioni (21) e, ancora una volta, si tenga conto della (20).

Riassumendo, da (2), (3) *e* (17) *si ha l'espressione canonica dell'elemento lineare di spazio sotto la forma*

$$dl^2 = e^{-2\nu}\{e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 dx_3^2\}, \tag{22}$$

dove $\nu(r, z)$ è un potenziale simmetrico, cioè una qualunque soluzione della *equazione* (20), *e λ rimane individuata, una volta assegnato ν, a meno di una costante additiva inessenziale* (in quanto si possono far coincidere, con semplice alterazione dell'unità di lunghezza, ossia moltiplicazione di r e z per una medesima costante, due dl^2, i quali differiscono soltanto per la determinazione di λ). *Si ha poi* dalla (1) $V = V_0 e^{\nu}$, e quindi *il potenziale statico*

$$-\frac{1}{2}V^2 = -\frac{1}{2}V_0^2 e^{2\nu}.$$

Dacchè V_0 è una semplice costante di omogeneità, rimane provato che *ad ogni ordinario potenziale simmetrico ν corrisponde univocameate un ds^2 einsteiniano del tipo binario di Weyl.*

5. — Osservazione critica.

Il sig. Weyl, dopo aver impostata la questione con molta eleganza, ne deduce le equazioni differenziali caratteristiche da un principio variazionale, perfettamente corretto, ma solo parzialmente applicato. Ed ecco come.

La variazione di un certo integrale

$$\iint \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2$$

deve essere zero per incrementi arbitrari dei coefficienti g_{ik} del ds^2 einsteiniano, vincolati soltanto ad annullarsi al contorno del campo di integrazione.

Quando pur si sappia — ed è il caso di Weyl — che il ds^2, a partire dal quale la variazione si deve annullare, può essere assunto sotto forma ortogonale (anzi parzialmente isometrica)

$$f\,dt^2 - \{h(dx_1^2 + dx_2^2) + l\,dx_3^2\},$$

non basta limitarsi a variazioni che conservano quella forma, ma è d'uopo lasciare a priori arbitrarie tutte le δg_{ik}. Altrimenti si ottengono condi-

zioni che sono indubbiamente necessarie, ma che in generale non esauriscono il principio variazionale. Tale circostanza si presenta appunto nel detto caso, nel quale Weyl trova *tre sole equazioni algebricamente distinte*, equivalenti alle nostre (11′), (12′), (13′), mentre il procedimento completo ne fornirebbe *cinque*.

Le proprietà più importanti (armonicità di r, carattere di potenziale binario della ν) sono già incluse nelle tre equazioni del Weyl e da lui ben messe in luce. Egli enuncia altresì il risultato esatto che ad ogni potenziale simmetrico ordinario fa riscontro un ds^2 einsteiniano univocamente determinato, ma lo desume (pag. 39 della Memoria citata) da una addizionale condizione di regolarità in tutto lo spazio, che non è il caso di invocare, trattandosi di rispecchiare più generalmente il punto di vista differenziale, il quale richiede soltanto regolarità locale.

Per il confronto delle formule posso limitarmi a rilevare che, a meno di inessenziali costanti additive, le funzioni $\psi = \log \sqrt{f}$ e $\gamma = \log \sqrt{hf}$ di Weyl si identificano rispettivamente colle nostre ν e λ, coincidendo le equazioni (15) (per gli spazî vuoti) e (16) della Memoria di Weyl con (13′) e (14′). Le equazioni omesse da Weyl (per incompleto sfruttamento del principio variazionale) sono in sostanza le (21).

6. — Espressione delle curvature principali.

Indichiamo con ϱ il logaritmo di $\frac{r}{r_0}$, essendo r_0 una lunghezza costante (arbitraria) che si introduce per ragione di omogeneità. Da

$$\frac{r}{r_0} = e^{\varrho} \tag{23}$$

segue

$$\frac{r_i}{r} = \varrho_i \ (i = 1, 2) \ ; \quad \frac{1}{r} \nabla^0(r, \nu) = \nabla^0(\varrho, \nu), \text{ ecc.}$$

Usufruiremo di ϱ per brevità di scrittura, nel riportare al $d\sigma_0^2$ [cfr. n. 3] anche le espressioni (14) dei simboli di Ricci α_{ik} spettanti al nostro dl^2 spaziale. Eliminando dai secondi membri della (16) le ν_{ik} mediante le (19), si ha immediatamente

$$\begin{cases} \alpha_{ik} = -\nu^0_{ik} + \nu_i \lambda_k + \nu_k \lambda_i - 3\, \nu_i \nu_k + a^0_{ik} \nabla^0(\nu - \lambda, \nu) \ (i, k = 1, 2); \\ \alpha_{i3} = 0 \ , \quad \alpha_{33} = r^2 e^{-2\lambda} \nabla^0(\nu - \varrho, \nu). \end{cases} \tag{24}$$

Dacchè il nostro dl^2 ha la forma ortogonale (22), ossia

$$e^{2(\lambda - \nu)} d\sigma_0^2 + r^2 e^{-2\nu} dx_3^2 ,$$

la solita equazione cubica, che determina le curvature principali, ammette intanto il fattore lineare $\alpha_{33} - \omega r^2 e^{-2\nu}$, e quindi la radice

$$\omega_3 = e^{-2(\lambda-\nu)} \nabla^0(\nu - \varrho\ ,\ \nu)\,. \tag{25}$$

A questa prima conclusione si poteva arrivare anche osservando che il secondo membro della (22) rientra nel tipo considerato a § 4 della Nota III, talchè la curvatura principale ω_3 (quella corrispondente alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$) si identifica colla curvatura gaussiana della forma binaria $e^{-2\nu} d\sigma^2 = e^{2(\lambda-\nu)} d\sigma_0^2$. Ciò porge

$$\omega_3 = - e^{-2(\lambda-\nu)} \Delta_2^0(\lambda - \nu)\,,$$

che coincide precisamente colla (25), in virtù di (13′) e (14′).

Le altre due curvature principali ω_1 e ω_2 rimangono definite dalla equazione quadratica

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega a_{11} & \alpha_{12} - \omega a_{12} \\ \alpha_{21} - \omega a_{21} & \alpha_{22} - \omega a_{22} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{26}$$

Dacchè, come ben si sa. $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ è conseguenza necessaria delle equazioni gravitazionali, la somma delle radici ω_1, ω_2 della equazione (26) vale $-\omega_3$. Quindi, mettendovi in evidenza come incognita $\omega + \frac{1}{2}\omega_3$, dovrà sparire il termine lineare. Ne segue che, ove si ponga

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik} + \tfrac{1}{2}\omega_3 e^{2(\lambda-\nu)} a_{ik}^0 = \alpha_{ik} + \tfrac{1}{2} a_{ik}^0 \nabla^0(\nu - \varrho\ ,\ \nu)\,,$$

ossia, badando al primo gruppo delle (24),

$$\beta_{ik} = - \nu_{ik}^0 + \nu_i \lambda_k + \nu_k \lambda_i - 3\nu_i \nu_k + \tfrac{1}{2} a_{ik}^0 \nabla^0(3\nu - 2\lambda - \varrho\ ,\ \nu)\,, \tag{27}$$

la (26) si riduce a

$$\beta + e^{4(\lambda-\nu)} a^0 \cdot (\omega + \tfrac{1}{2}\omega_3)^2 = 0\,, \tag{26′}$$

rappresentando β il determinante $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$ e a^0 quello delle a_{ik}^0 (discriminante del $d\sigma_0^2$).

Ne risulta, tenendo conto della (25), l'espressione comprensiva delle due curvature ω_1, ω_2 sotto la forma

$$\omega = e^{-2(\lambda-\nu)} \left\{ - \tfrac{1}{2} \nabla^0(\nu - \varrho\ ,\ \nu) \pm \sqrt{\frac{-\beta}{a^0}} \right\}. \tag{28}$$

Importa rilevare che β *deve ritenersi essenzialmente diverso da zero* (e quindi negativo, affinchè riesca reale $\sqrt{\frac{-\beta}{a^0}}$). Infatti, per $\beta = 0$, coinciderebbero le due curvature ω_1 e ω_2, e si ricadrebbe nel sottocaso B_2), già esaurito nelle Note precedenti. Si può domandare in modo preciso a

quale categoria di soluzioni B_2) corrisponde il valore limite $\beta = 0$. Ciò risulta agevolmente dal confronto del dl^2 [quale risulta dalle (2), (3)] coll'espressione che gli compete in generale nel caso B_2). Quest'ultima — aggiungo un asterisco per evitare ambiguità col $d\sigma$ della presente Nota — è $e^{2\tau}(d\sigma^{*2} + dx_3^2)$, dove $d\sigma^*$ sta a rappresentare (al pari di $d\sigma$) un elemento lineare binario indipendente da x_3, e $\tau = r + \zeta$, essendo ζ funzione della sola x_3. Dacchè r ha identico significato nei due casi, perchè vi sia coincidenza, è intanto necessario che, anche nella B_2), esso risulti indipendente da x_3. Dal confronto dei due dl^2 per $dx_3 = 0$ segue allora che ζ deve ridursi ad una costante. Ora, nelle tre categorie di soluzioni B_2), ve n'è una e una soltanto — quella delle soluzioni quadrantali — in cui $e^{-\tau}$ non dipende da x_3. Concludiamo pertanto che *il caso particolare* $\beta = 0$ *riporterebbe alle soluzioni quadrantali colla specificazione* $\zeta = \text{cost.}$, ciò che implica [cfr. Nota VI, § 4] l'annullarsi della costante μ.

Chimica vegetale. — *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota III del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

Nella nostra seconda Nota su questo argomento (1) abbiamo messo in rilievo che alcuni composti fondamentali per gli alcaloidi vegetali come la piridina, la piperidina e la xantina, non esercitano un'azione dannosa sulle piantine di fagiuoli, mentre quasi tutti gli alcaloidi naturali sperimentati e segnatamente fra questi la caffeina si mostrano velenosi. Appariva però opportuno di studiare l'azione dei derivati più prossimi di alcuni composti fondamentali e specialmente quelli metilati.

Noi abbiamo esaminato, a tale scopo, il contegno delle piantine di fagiuoli fatte crescere, come nelle nostre precedenti esperienze, sul cotone idrofilo, con una serie di sostanze opportunamente scelte; quando le piantine avevano raggiunto un certo grado di sviluppo venivano innaffiate colle rispettive soluzioni all'uno per mille; le basi furono impiegate allo stato di tartarati o di fosfati e si notò che questi ultimi esercitavano un'azione meno venefica dei primi. Così si può avere una graduazione nell'impiego delle basi tossiche giovandosi anche del fatto osservato l'anno scorso, che operando in germinatoi di zinco l'azione è meno intensa che in quelli di vetro.

Per accertare l'influenza dei gruppi metilici abbiamo anzitutto sperimentato le tre *ammine metilate:* la monometil, la dimetil e la trimetilammina tanto allo stato di tartarati che di fosfati. L'effetto fu quello pre-

(1) Questi Rendiconti, vol. XXVII, I, pag. 38.

veduto: mentre i rispettivi sali ammonici non esercitano una speciale azione, le tre ammine si mostrarono venefiche, ma in grado diverso col numero crescente di metili per cui la metilammina è la meno tossica e la sua azione meno pronta, mentre la più rapida e nell'effetto la più efficace è la trimetilammina. Le lesioni si manifestarono col comparire di piccole macchie giallo-brune sulle nervature delle prime foglie e quindi su tutta la superficie delle foglie, che finivano per seccarsi mentre analoghi fenomeni apparivano sulle prime foglie composte.

In relazione con le ammine abbiamo studiato l'effetto dei composti quaternari: i fosfati e i tartarati del tetrametil e tetraetilammonio, $(CH_3)_4N \cdot R$ e $(C_2H_5)_4N \cdot R$. Le due sostanze si mostrarono meno tossiche delle ammine, ma in accordo con la loro speciale struttura e col loro peculiare contegno chimico, in modo diverso dalle ammine ora menzionate. Al colore molto più scuro delle foglie e ad un più lento sviluppo rispetto ai testimoni si associò un abito tanto caratteristico da poter servire quasi come mezzo per riconoscere per questa via i composti quaternari. Questo abito era determinato segnatamente dalla inclinazione in basso delle foglie e dalla circostanza che quelle composte avevano un fusticino così breve che pareva partissero dallo stesso verticello di quelle semplici. Le piantine assumevano in seguito un aspetto coriaceo tanto da assomigliarle quasi alle piante artificiali, e ciò massime se coltivate in germinatoi di vetro, e finivano coll'appassire. Coi sali di tetrametilammonio le foglie composte mostravano inoltre alcune striature prodotte da albinismo lungo le nervature principali.

In seguito all'azione fortemente venefica della *caffeina* o *trimetilxantina*, $C_5HO_2N_4(CH_3)_3$, era da aspettarsi che la *teobromina* o *dimetilxantina*, $C_5H_2O_2N_4(CH_3)_2$, avesse un effetto più moderato. Così è realmente; le piantine si mantengono più a lungo in vita e le prime foglie non appassiscono tanto presto come con la caffeina, ma modificano il loro aspetto in modo assai caratteristico: diventano più larghe e spesse di quelle dei testimoni e presentano un grazioso fenomeno di albinismo diverso peraltro da quello prodotto dalla nicotina. Sulle lamine fogliari appariscono delle screziature gialle che ricordano quelle dell'Aucuba japonica. In seguito, mentre si sviluppano le seconde e le terze foglie composte, le prime foglie semplici ingialliscono e cadono mentre le piantine finiscono coll'appassire.

Dopo questo risultato appariva probabile che anche l'*acido metilurico* $(C_5H_3O_3N_4)CH_3$, avesse qualche azione venefica sulle piantine di fagioli in confronto all'*acido urico* che, come avevamo trovato l'anno scorso, non ne possiede alcuna. Le prove di confronto eseguite coi rispettivi sali potassici, confermarono la supposizione. L'acido monometilurico sembrava da principio, fino allo sviluppo delle seconde foglie composte, senza peculiare effetto; ma in seguito comparvero sulle prime foglie semplici delle chiazze più chiare che presentavano una certa rassomiglianza con quelle delle piante trattate

colla teobromina: il fenomeno si estese poi anche alle seconde foglie e le piantine andarono deperendo fino all'appassimento.

In seguito a queste esperienze ci parve opportuno esaminare il contegno di alcuni derivati naturali ed artificiali della piperidina ed in proposito abbiamo studiato l'azione della N-metilpiperidina, del tartarato di dimetilpiperidilammonio, della conina o α-propilpiperidina, della acetilpiperidina e infine della piperina (piperilpiperidina). La *piperidina*, $C_5H_{10}NH$, in confronto colla piridina, si mostrò questa volta non del tutto indifferente, ma le piantine, con qualche lieve sofferenza, arrivarono a completo sviluppo; tutti i suaccennati derivati si mostrarono invece più o meno decisamente tossici. L'*N-metilpiperidina*, $C_5H_{10}NCH_3$ esplicò la sua azione specialmente sulle radici per cui le piantine andarono rapidamente deperendo. Il tartarato di *dimetilpiperidilammonio* determinò da principio un aspetto delle piantine che ricordava quello caratteristico già menzionato degli ammoni quaternari ed anche in questo caso le piantine finirono coll'appassire. La *conina*, $C_5H_9(C_3H_7)NH$, produsse delle macchie sulle foglie che ne determinarono presto il disseccamento. Anche l'*acetilpiperidina*, $C_5H_{10}N.C_2H_3O$, si mostrò velenosa: le foglie cominciarono ad appassire ai bordi, poi su tutta la lamina ingiallendo rapidamente, all'infuori di una piccola zona centrale. Si sarebbe potuto supporre che il grosso radicale dell'acido piperinico, $CH_2O_2 — C_6H_3 — CH = CH — CH = CH — COOH$, non dovesse determinare un'azione tossica se associato, alla piperidina, ma invece non è così e la *piperina*, $C_5H_{10}N.CO.C_{11}H_9O_2$, sebbene da principio non determinasse nessun fatto anormale, finì col produrre la morte delle piante sia coll'appassimento delle foglie ed in seguito il ripiegamento degli steli.

Passando ad altri alcaloidi naturali, abbiamo voluto comparare l'azione della *morfina*, $C_{17}H_{17}NO(OH)_2$ con quella della *codeina*, $C_{17}H_{17}NO(OH)(OCH_3)$, o metilmorfina; la comparazione in questo caso era interessante perchè si trattava di vedere se anche l'eterificazione di un ossidrile col metile avesse per effetto un'esaltazione delle proprietà tossiche dell'alcaloide contrariamente a quanto finora dai più si credeva. Così è di fatto. Come avevamo osservato l'anno scorso, la morfina in germinatoio di zinco non determina fenomeni tossici rimarchevoli; soltanto rimarchevole ed anzi quasi caratteristico è il color verde, assai cupo, che assumono le foglie. La *codeina* invece, oltre al color cupo, produsse un rallentamento di sviluppo e poi numerose macchie di color ruggine sulle foglie che determinarono infine l'appassimento delle piantine. Abbiamo sperimentato anche la *diacetilmorfina* (eroina), $C_{17}H_{17}NO(OC_2H_3O)_2$; da principio questa sostanza sembrava indifferente; ma più avanti le piantine cominciarono a deperire rapidamente coll'ingiallimento delle foglie.

Ci sembrò poi interessante anche la comparazione della *chinina*, $C_{19}H_{21}ON_2(OCH_3)$, con la *cinconina*, $C_{19}H_{22}ON_2$, sebbene in questo caso la

differenza di costituzione fosse non di un metile soltanto, ma di un ossimetile; non pertanto la cinconina si mostrò meno venefica della chinina producendo presso a poco gli stessi fenomeni soltanto in grado meno accentuato.

Estendendo anche ad altri alcaloidi le nostre prove per acquistare esperienza maggiore, abbiamo comparato l'azione dell'*atropina*, $C_8H_{14}NO.C_9H_9O_2$, con quella della *cocaina*, $C_8H_{13}N(O.C_7H_5O)(COOCH_3)$, che hanno il nucleo fondamentale piperidinpirrolidinico in comune, ma con diverse aggiunte: nel primo caso un ossidrile eterificato dall'acido tropico; nel secondo dall'acido benzoico con un'appendice carbossimetilica. Le prove di confronto hanno dimostrato che entrambi questi alcaloidi hanno un'azione venefica, ma quella della cocaina è assai più pronta ed intensa di quella della atropina. Con quest'ultima le piantine da principio si svilupparono normalmente con un leggero ritardo e solo dopo una diecina di giorni, in germinatoio zincato, apparvero delle piccole verruche giallo-rossastre sulle foglie semplici che in seguito andarono aumentando, ma senza che le piantine avessero troppo a soffrire; soltanto più tardi, quando le seconde foglie erano sviluppate, comparvero sulle prime foglie semplici delle chiazze che determinarono un rapido deperimento delle piantine; alcune peraltro riuscirono a fiorire.

La *cocaina* invece produsse già dopo cinque giorni la comparsa di macchie brune caratteristiche e delle punteggiature giallo-rossastre sulle prime foglie semplici che andavano cadendo; prima che si potessero sviluppare le prime foglie composte le piantine perirono. Questa notevole differenza nella tossicità dei due alcaloidi è probabilmente da attribuirsi non già alla presenza del radicale dell'acido benzoico in luogo di quello dell'acido tropico, nella cocaina, bensì a quella del gruppo carbossimetilico.

Quale seguito allo studio della morfina abbiamo sperimentato anche la *papaverina* e la *narcotina*, quali alcaloidi isochinolinici, per vedere se la loro azione fosse diversa da quella della morfina come lo è la loro costituzione: realmente le due basi sono assai più tossiche della morfina e si assomigliano nei loro effetti; le piantine non risentono subito l'azione del veleno, ma poi incomincia un progressivo deperimento determinato dall'appassire delle foglie.

È velenosa pure la *sparteina*, $C_{15}H_{26}N_2$, la cui costituzione non è ancora del tutto accertata, ma che sembra essere un derivato complesso della piperidina. Essa produsse oltre al colore più cupo delle foglie, tante volte osservato, delle macchie brunastre sulla lamina delle medesime, che rapidamente si andarono seccando.

Infine abbiamo ripetuto le esperienze dello scorso anno colla *nicotina* e la *stricnina*. Abbiamo potuto confermare che la seconda produce, all'inizio del trattamento, un maggior sviluppo delle piantine rispetto ai testimoni, ma poi l'accrescimento si arresta e le piantine periscono.

Colla nicotina all'1 per mille si ebbero i fenomeni già descritti l'anno scorso, cioè il disseccamento delle prime foglie semplici e il caratteristico

albinismo di quelle composte; peraltro osservammo quest'anno che se si impiegano soluzioni più diluite, cioè all'1 per diecimila, non si ha nessun effetto. Siccome la nicotina nel tabacco è accompagnata, come noi trovammo (1), dalla *isoamilammina*, $(CH_3)_2:CH.CH_2.CH_2NH_2$, così credemmo opportuno studiarne l'azione sulle piantine di fagioli. Contro la nostra aspettativa, la base si mostrò venefica determinando la caduta delle foglie semplici ed un albinismo delle prime foglie composte, che ricorda quello prodotto dalla nicotina; le piantine appassirono troppo rapidamente e l'esperienza, fatta col tartarato in germinatoi di vetro, va ripresa impiegando il fosfato in germinatoi di zinco, comparando inoltre l'azione dell'isoamilammina con quella dell'amilammina normale.

Dopo questi concordi risultati che attestano tutti la influenza dei metili sull'azione tossica delle sostanze fin qui sperimentate, ci parve utile esaminare il contegno di qualche composto aromatico anche se estraneo al regno vegetale. Così abbiamo impiegato l'*anilina*, $C_6H_5NH_2$, l'*acetanilide*, $C_6H_5NH.COCH_3$, e la *metilacetanilide* (esalgina), $C_6H_5NCH_3.COCH_3$; tutte e tre le sostanze si mostrarono venefiche, ma l'acetanilide più dell'anilina e la esalgina più delle altre due. Le lesioni prodotte si manifestarono con delle chiazze gialle sulle foglie, che condussero all'appassimento delle piantine.

Anche comparando l'azione della *pirocatechina*, $C_6H_4(OH)_2$, con quella del *guaiacolo*, $C_6H_4OH.OCH_3$, si potè confermare la regola, sebbene anche la prima sia venefica e manifesti la sua azione sulle radici per cui i fusti si piegano; malgrado ciò, le piantine mettendo le radici secondarie riuscirono a mantenersi in vita tanto da sviluppare le seconde foglie composte. Col guaiacolo invece la sofferenza si mostrò maggiore e le foglie, assumendo una colorazione più cupa, incominciarono ad appassire ai bordi e lo sviluppo si arrestò già all'inizio delle prime foglie composte.

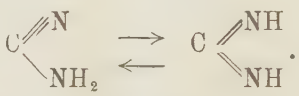
Era pure nostra intenzione di comparare l'effetto dell'*indolo* con quello dell'*α-metilindolo*, ma per la insufficiente solubilità di quest'ultimo la prova riuscì incerta. L'indolo peraltro è velenoso e la sua azione che ricorda quella dell'eugenolo osservata l'anno scorso, si manifesta sui fusti che tosto si ripiegano e conducono all'appassimento delle piantine.

Inoltre abbiamo voluto vedere se il metile anche quando eterifica il gruppo carbossilico negli acidi manifestasse qualche azione ed in proposito abbiamo fatto una prova parallela col *salicilato potassico*, $C_6H_4(OH)(COOK)$ ed il *salicilato di metile*, $C_6H_4(OH)(COO.CH_3)$. Col primo non si ebbe alcun fenomeno anormale all'infuori di qualche ritardo di sviluppo; le piantine fiorirono ed anzi qualche seme potè maturare. Il salicilato di metile parve pure da principio senza effetto, ma a vegetazione inoltrata le piantine

(1) Questi Rendiconti, vol. XX, I, pag. 614 (1911).

si seccarono con ingiallimento delle foglie. L'azione del salicilato di metile sarebbe stata probabilmente più efficace se la sua solubilità fosse maggiore e però converrà riprendere questi studî impiegando eteri composti più solubili.

Fuori di programma stanno, per così dire, le prove che abbiamo fatto con alcune sostanze della serie urica e cianica; la comparazione degli effetti prodotti da queste sostanze poteva interessare da un altro punto di vista. Abbiamo esaminato la resistenza delle piantine di fagioli rispetto all'*urea*, $CO(NH_2)_2$, ed alla *guanidina*, $CNH(NH_2)_2$, alla *cianamide*. $CN.NH_2$, ed al *cianato potassico*, CN.OK, che rispettivamente si corrispondono e finalmente al *cianuro potassico*, CNK. Il risultato è stato questo: che la cianamide si mostrò la più velenosa fra le tre prime sostanze; venne poi la guanidina, mentre che coll'urea si ebbe uno sviluppo straordinariamente rigoglioso. Il cianato ed il cianuro, entrambi anch'essi venefici, determinarono uno sviluppo assai ritardato. È rimarchevole la differenza fra l'azione dell'urea e quella della guanidina dovuta, come apparirebbe, alla sostituzione dell'immino all'ossigeno; ciò che starebbe in accordo colla forte tossicità della cianamide che può essere considerata, nella sua forma tautomera, come la carbodiimide:



Dalle esperienze descritte risulta dunque che la nostra supposizione espressa in seguito alle prove fatte l'anno scorso con la xantina e la trimetilxantina (caffeina), riguardo alla probabile influenza dei metili è stata largamente e pienamente confermata; crediamo si possa ora affermare con certezza che i metili, lungi dall'avere un'influenza protettrice sui gruppi reattivi quali gli ossidrili e i gruppi amminici ed imminici, esaltano l'azione delle sostanze fondamentali che li contengono. Ma non sono soltanto i gruppi metilici che modificano l'azione dei composti organici sulle piantine di fagioli; anche gli altri radicali hanno il loro significato: cioè il gruppo propilico nella conina, l'acetile nell'acetilpiperidina, nella diacetilmorfina e nell'acetanilide ed il radicale dell'acido piperinico nella piperina.

Davanti a questo quadro si è portati a credere che le piante partendo dai composti più semplici fondamentali li adornino, per così dire, chimicamente di gruppi alchilici o acidi e di catene laterali, per adattarli a speciali funzioni.

In occasione di un'esperienza di scuola diretta a dimostrare la scomparsa dell'amido dalle foglie durante la notte, abbiamo eseguito la nota prova anche con foglie di piantine che avevano subìto il trattamento con la teobromina dapprima, e poi con alcune delle altre sostanze da noi stu-

diate. A questo scopo alcune foglie venivano ricoperte la sera parzialmente con una striscia di carta nera e nel giorno successivo, dopo aver subìto l'insolazione, immerse prima per qualche istante nell'acqua bollente, poi decolorate coll'alcool ed infine trattate con una soluzione di iodio nell'ioduro di potassio.

Mentre sulle foglie normali, come è noto, perchè l'amido dopo il vuotamento notturno non si può riprodurre nella zona protetta, comparisce la striscia bianca su fondo scuro, in alcuni dei casi da noi studiati anche la zona ricoperta si mostrava più o meno uniformemente colorata dall'iodio. Inoltre in questo modo venivano messe in evidenza le alterazioni subìte dal tessuto fogliare.

Il massimo effetto lo si ebbe con le piantine trattate con la teobromina; in questo caso le foglie che presentavano le caratteristiche screziature, apparivano da principio uniformemente colorate anche dove erano state protette dalla carta nera, poi, mano mano che le foglie si avvicinavano all'appassimento, la striscia cominciava a comparire, ma ricoperta come tutto il resto della superficie, da chiazze colorate, che si andavano facendo sempre più deboli fino a che in ultimo, essendo l'amido del tutto scomparso, le foglie apparivano bianche su tutta la superficie.

Analogamente alle foglie delle piantine trattate con teobromina si comportarono quelle che subirono il trattamento colla caffeina, senonchè in questo caso la colorazione non appariva distribuita uniformemente su tutta la superficie fogliare, ma segnatamente lungo le nervature. L'acido metilurico produsse invece soltanto delle macchie sulla striscia protetta.

Con le ammine la reazione riuscì meno marcata e si manifestarono, col crescere del numero dei metili, delle macchiette corrispondenti all'alterazione dei tessuti. Con i composti quaternari la colorazione appariva uniforme e sulla zona coperta l'amido non era completamente scomparso.

La reazione dell'iodio si mostrò diversa per le piante trattate con la morfina e la codeina da un lato e l'atropina e la cocaina dall'altro. La morfina non produsse nulla di anormale, mentre la codeina determinò delle macchie anche nella parte delle foglie coperta dalla carta nera; e così mentre l'atropina non determinò nella reazione coll'iodio che piccole punteggiature in corrispondenza delle verruche, la cocaina produsse una ornamentale macchiettatura in corrispondenza alle lesioni delle foglie, mentre la striscia appariva ben marcata.

Con la stricnina le foglie non si colorano uniformemente e le macchie si estendono anche alla zona coperta.

Finalmente coll'indolo, la pagina fogliare, compresa la zona coperta, risultò colorata segnatamente lungo le nervature.

In tutti gli altri casi non si ebbero fatti particolarmente degni di rilievo.

Da queste esperienze risulta che le sostanze venefiche da noi sperimentate sulle piantine di fagioli influiscono in alcuni casi sulla migrazione dell'amido per cui la reazione dell'iodio ne dimostrò la persistenza anche dove la luce non potè intervenire. Anche la formazione dell'amido ne viene ostacolata perchè spesso le foglie non risultano uniformemente colorate dall'iodio. ma nel loro aspetto presentano delle discontinuità in forma di macchie o venature. L'azione delle sostanze tossiche si manifesta però tanto sul processo della formazione, quanto su quello della idrolisi dell'amido ed a seconda se l'uno o l'altro prevale, le foglie assumono pel trattamento coll'iodio un aspetto particolare.

Per gli ulteriori dettagli di queste, come delle altre esperienze riassunte in questa Nota, rimandiamo alla Memoria estesa che comparirà negli Atti dell'Accademia di Bologna e nella Gazzetta Chimica Italiana e sarà corredata da fotografie e, se sarà possibile, da riproduzioni eliografiche per quanto riguarda le prove coll'iodio.

Finalmente ci è grato ricordare con riconoscenza l'aiuto perseverante ed intelligente che ci hanno prestato le signorine dottoressa Angela Puricelli e Paolina Cicognari.

Chimica. — *Sopra alcune trasformazioni della nitrocellulosa.* Nota preliminare del Socio A. Angeli.

Le esperienze che comunico in questa breve Nota preliminare, hanno avuto origine da ricerche che ho dovuto eseguire sopra l'azione di alcune sostanze che vengono aggiunte alle polveri senza fumo, a base di nitrocellulosa e di nitroglicerina, come stabilizzanti, vale a dire che avrebbero la proprietà di conferire loro una maggiore stabilità ed anche una maggiore resistenza rispetto ai saggi al calore cui vengono sottoposte le polveri stesse. Oltre a composti inorganici, quali i carbonati ed i bicarbonati, si impiegano a questo scopo anche sostanze organiche, per lo più di natura basica o capaci di fornire basi: in tal modo verrebbero neutralizzati i varî acidi che possono prendere origine durante i processi di decomposizione cui vanno soggette le polveri, compreso l'acido nitroso, la comparsa più o meno facile e copiosa del quale fornisce, come è noto, uno dei principali criterî per giudicare sullo stato di conservazione delle polveri senza fumo.

Le basi organiche appartengono alle classi più disparate, quali l'urea, la difenilurea, la difenildimetilurea, l'anilina, la difenilammina ecc. Alcune di queste si ritrovano inalterate anche dopo molti anni nelle polveri, come p. es. la difenilammina, la quale ha principalmente lo scopo di fissare l'acido nitroso che eventualmente può formarsi, e con cui fornisce con tutta facilità una nitrosammina; altre invece, come l'anilina, impartiscono all'esplosivo

una colorazione che diventa sempre più bruna; la base subisce senza dubbio un processo di decomposizione, tanto che dopo qualche tempo non se ne trova più quasi traccia.

Come ha trovato I. Walter (1) anche la dimetilanilina reagisce a temperatura ordinaria con la nitrocellulosa e con il celluloide, ed altrettanto fanno la o- e la p-toluidina, la fenilidrazina, la dietilanilina, la dimetil-o-toluidina, le due naftilammine; la difenilammina, la metildifenilammina e la benzildifenilammina non esercitano quasi azione di sorta. Il tetrametildiamminodifenilmetano, in soluzione benzolica, colora pure la nitrocellulosa.

Le reazioni vengono apprezzate da Walter dalle colorazioni più o meno intense che assume la nitrocellulosa, ovvero il celluloide, e dal loro apparire più o meno rapido.

Sopra la natura delle sostanze che in tal modo prendono origine, Walter non ne parla; il colore verde che in una prima fase si osserva impiegando la dimetilanilina accenna alla formazione del corrispondente nitrosoderivato; ma con tutta probabilità si tratta di reazioni molto complicate; basti dire che da noi si è osservato il caso di una cellulosa pura e bianchissima, che a contatto di balistite contenente una piccolissima quantità di anilina, si è colorata dopo breve tempo in roseo; la materia colorante, da alcune reazioni, apparì come costituita da un sale di amminoazobenzolo. Ciò dimostra dunque che non solo la base reagisce in seno all'esplosivo colorandolo in bruno, ma altresì che vapori di anilina e vapori nitrosi si sviluppano dalla balistite e si portano all'esterno, vale a dire sul cotone, per reagire fra di loro. Anche con la lana di vetro si osserva lo stesso fenomeno.

A scopo orientativo e per semplificare la ricerca, io ho incominciato dallo studiare il comportamento delle nitrocellulose rispetto ad una base terziaria, debolissima e che per di più nella sua molecola non contenesse anelli benzolici: ho dato la preferenza alla piridina, come una delle più facilmente accessibili.

Come nitrocellulosa io ho impiegato del cotone collodio, ancora umido, che conteneva circa il 12 % di azoto; ma anche il cosidetto fulmicotone si comporta nello stesso modo. Essa viene facilmente gelatinizzata dalla piridina; adoperando molto solvente si ottengono liquidi densi che hanno l'aspetto del collodio; a differenza però di quest'ultimo, nel caso delle soluzioni piridiche, si osserva che col tempo, vale a dire dopo uno ovvero pochi giorni, a temperatura ordinaria, il liquido va diventando sempre più fluido e scorrevole; la viscosità diminuisce a tal segno che dopo qualche giorno ha quasi assunto nuovamente l'aspetto della piridina impiegata come solvente (2).

(1) Zeit. für angew. Chemie, *24* (1911), 62.

(2) Il metodo si presta perciò bene anche per vedere se la nitrocellulosa contiene della cellulosa inalterata.

Ciò dimostra che è avvenuto un profondo processo di demolizione nella molecola della nitrocellulosa.

Versando sopra lo stesso cotone collodio della piridina in quantità sufficiente per bagnarlo appena, dopo qualche ora si ha una massa semisolida, trasparente, che ha quasi l'aspetto della gomma elastica. Anche in questo caso si ripete lo stesso fenomeno; il prodotto lasciato a temperatura ambiente, all'indomani apparisce come un liquido densissimo e si nota un lieve sviluppo gassoso; la viscosità va successivamente diminuendo tanto che dopo qualche giorno si ha una soluzione che si può filtrare con tutta facilità attraverso carta.

Il liquido di colore giallognolo, e che ha sempre intenso odore di piridina, per trattamento con acqua separa una massa di aspetto resinoso e quasi bianca. Si decanta il liquido acquoso ed il prodotto semisolido si stempra con acido solforico diluito allo scopo di eliminare l'eccesso di piridina; assume così l'aspetto di una polvere bianca che viene raccolta su filtro e lavata con acqua. Le acque madri, assieme a piridina, contengono nitrati e probabilmente nitriti, assieme a poca sostanza organica, forse identica con la precedente.

Il prodotto trattiene tenacemente la piridina; per eliminarla il più che sia possibile si scioglie la sostanza in alcool e la soluzione così ottenuta si versa di nuovo in acido solforico diluito; precipita sotto forma di polvere bianca, che si lava sul filtro fino a che non contiene più solfati e poi si secca su acido solforico. Il rendimento è di circa 80 % del cotone collodio impiegato, riferendosi sempre a prodotti secchi.

Il prodotto così ottenuto si presenta sotto forma di una polvere amorfa, solubilissima in acetone, solubile in alcool, quasi insolubile in etere ed in benzolo. Riscaldato rapidamente in capsula di porcellana deflaga, ma in modo assai meno vivace della nitrocellulosa di partenza.

Per i caratteri e comportamento, il prodotto rassomiglia alquanto ad una sostanza che E. Berl ed A. Fodor [1] hanno ottenuto in piccola quantità facendo agire gli idrati alcalini ovvero il carbonato sodico sopra soluzioni molto diluite di nitrocellulosa in alcool ed etere, e che essi considerano come costituita da eteri nitrici di un acido cellonico (pentanitrato del lattone dell'acido glicosidoessonico):

$$C_{24}O_{33}H_{16}(NO_3)_5.$$

L'azoto venne determinato sia col metodo di Dumas, sia sotto forma di biossido; si ebbero numeri non sempre perfettamente concordanti fra di loro e che oscillano fra 9 e 10 %, vale a dire lievemente superiori a quelli trovati da Berl e Fodor; per il loro prodotto si calcola $N = 7{,}9$ %.

[1] Zeit. für das Gesammte Schiess und Sprengstoff. *5* (1910), 254 seg.

Alle determinazioni da me finora eseguite non si può attribuire un gran valore, perchè mi è mancato il tempo ed anche i mezzi per sottoporre il prodotto ai voluti trattamenti in modo di avere una sostanza unica per quanto possibile.

Anche rispetto al calore la sostanza si comporta in modo alquanto diverso: il composto di Berl e Fodor deflagra verso 163°; la sostanza da me ottenuta invece, riscaldata in tubetto di vetro in bagno di acido solforico, verso 165° incomincia ad imbrunire; la colorazione si fa sempre più intensa, tanto che verso 250° apparisce quasi nera.

Dati i reattivi energici che Berl e Fodor impiegano nella loro preparazione, assieme all'etere nitrico essi ottengono anche prodotti privi di azoto.

La soluzione alcoolica della sostanza, versata in acqua, dà un liquido opalescente, stabilissimo; senza dubbio si tratta di una soluzione colloidale, che coagula subito con cloruro sodico ovvero con solfato ammonico; coagula pure immediatamente con soluzione di gelatina; non precipita invece per aggiunta di soluzione acquosa di tannino. Con benzolo ed acido solforico fornisce nitrobenzolo: con acido solforico in presenza di mercurio sviluppa biossido di azoto.

Ponendone una piccola quantità sopra una cartina reattiva al dimetilamminoazobenzolo bagnata con acqua, dapprima la carta conserva il suo colore giallo caratteristico, ma dopo un po' di tempo comparisce una macchia intensamente rossa.

È insolubile in ammoniaca; si scioglie invece facilmente negli idrati alcalini diluiti; tali soluzioni con acido dànno un precipitato bianco molto voluminoso; conservate per qualche tempo intorbidano e diventano brune. Riduce il nitrato d'argento ammoniacale, ma non ha quasi azione sul liquido di Fehling.

Al pari della sostanza di Berl e Fodor anche il prodotto ottenuto per mezzo della piridina, reagisce facilmente con la fenilidrazina.

È interessante il fatto che la nitrocellulosa per semplice azione, a temperatura ordinaria, di una base debolissima come la piridina, venga decomposta con tanta facilità ed in modo così profondo, con formazione di prodotti di natura acida, ovvero che possono dare origine ad acidi. Così se si tratta con una goccia del liquido ottenuto per azione della piridina, una cartina al dimetilamminoazobenzolo, questa conserva il suo colore giallo; se si rende umida con acqua essa assume ben presto una colorazione rossa. Anche la sostanza sospesa in acqua fissa assai bene il dimetilamminoazobenzolo, colore basico, e si colora in rosso intenso. La comparsa dell'acidità molto probabilmente è dovuta al fatto che la piridina, base debolissima, evapora, e rimane il lattone e forse anche acido nitrico proveniente dalla denitrazione della nitrocellulosa; è noto d'altra parte che i sali di piridina vengono facilmente idrolizzati per azione dell'acqua.

È pure noto che i nitrati alcoolici, per azione degli alcali, in parte subiscono la saponificazione normale per dare nitrati; ma in parte il residuo organico subisce anche un processo di ossidazione ed allora si formano prodotti di riduzione dell'acido nitrico, dai nitriti all'ammoniaca. I prodotti di ossidazione possono essere di natura acida, come nel caso in parola. Ciò fa nascere quindi dei dubbî sulla opportunità di aggiungere basi organiche, anche deboli, alle polveri senza fumo, allo scopo di neutralizzare gli acidi che possono contenere, ovvero che prendono origine in seguito ai processi che accompagnano le alterazioni cui vanno soggette. Le precedenti esperienze dimostrano infatti che per tale trattamento si formano facilmente prodotti di natura acida, ovvero che possono dare origine ad acidi. Berl e Fodor hanno richiamato l'attenzione sopra l'analogo inconveniente che può verificarsi per trattamento della nitrocellulosa con carbonati alcalini, sebbene in questo caso i pericoli sieno relativamente minori, perchè le basi forti dànno sali più stabili con gli acidi che si possono formare.

Come prima ho accennato, una delle basi che si conservano più a lungo nelle polveri senza fumo, è la difenilammina; ciò molto probabilmente è dovuto al fatto che si tratta di una base estremamente debole; il suo ufficio si limiterebbe a quello di fissare l'acido nitroso che eventualmente può formarsi, e col quale, come è noto, fornisce la corrispondente nitrosammina.

La chinolina e la nicotina reagiscono del pari sulla nitrocellulosa, ma in modo assai più lento.

Comunico con tutto riserbo i risultati di queste esperienze preliminari che mi propongo di continuare quando avrò il tempo ed i mezzi necessari a mia disposizione.

Parassitologia. *Nuove ricerche sulla malaria.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Storia della scienza. — *Lo sviluppo della Meccanica sino ai discepoli di Galileo.* Memoria del Corrisp. R. Marcolongo.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Ottica. — *Sui fenomeni di diffrazione di Fraunhofer* [1]. Nota del Corrisp. O. Tedone.

1. Centro di scuotimento elettromagnetico infinitamente lontano. — Cercheremo di ottenere il campo elettromagnetico dovuto ad un centro di scuotimento infinitamente lontano come limite di un campo dovuto ad un centro di scuotimento al finito, quando questo centro si allontana indefinitamente in una direzione assegnata. E, per prepararci a questa ricerca, cominceremo col trattare la quistione analoga nel caso più semplice in cui, invece di propagazione di onde elettromagnetiche, si tratti della propagazione di un moto vibratorio nell'interno di un fluido elastico omogeneo. Restando in quest'ultima ipotesi, se, per rappresentare lo stato di moto, all'interno del fluido, ci serviamo dell'espressione φ del potenziale di velocità, una vibrazione armonica prodotta da un centro di scuotimento A_0, al finito, sarà rappresentata dalla formola

$$\varphi = \frac{a}{r_0} \cos 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta \right) \tag{1}$$

in cui T e λ rappresentano il periodo e la lunghezza d'onda della vibrazione, r_0 la distanza del punto $A_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ al punto d'osservazione (ξ, η, ζ), τ il tempo contato a partire da un istante che più tardi preciseremo e a e δ due costanti. Ci proponiamo, quindi, di cercare che cosa diventa la (1) quando il punto A_0 si sposta su di una retta che, possiamo sempre supporre, passi per l'origine O degli assi coordinati, allontanandosi indefinitamente da questo punto. Scegliamo, perciò, per senso positivo, su questa retta, quello che da A_0 va verso O, e indichiamo con $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ i suoi coseni direttori; chiamiamo ω la superficie sferica di centro A_0, passante per l'origine O, τ_0 il tempo impiegato dal moto vibratorio ad andare dal centro A_0 alla sfera ω, e, precisando, indichiamo con τ il tempo impiegato dal moto stesso a passare dalla sfera ω al punto (ξ, η, ζ). Allora, l'argomento del cos, nella (1), si può scrivere

$$2\pi \left(\frac{\tau_0 + \tau}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta' \right), \tag{2}$$

δ' essendo una costante indipendente dalla posizione di A_0. E, se ϱ_0 è il

[1] Questa Nota fa seguito all'altra: *Sulla maniera di stabilire le formole fondam. dell'ordin. teoria della diffraz.*, pubblicata in questi stessi Rend., seduta 19 maggio 1918.

raggio della sfera ω, potremo scrivere

$$r_0 = \sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+(z_0-\zeta)^2} =$$

$$= \varrho_0\left[1+2\frac{\alpha_0\xi+\beta_0\eta+\gamma_0\zeta}{\varrho_0}+\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\varrho_0^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

per cui, per ϱ_0 tendente all'infinito, si può sostituire ad r_0

$$\varrho_0+\alpha_0\xi+\beta_0\eta+\gamma_0\zeta,$$

ed il limite dell'argomento (2), per $\varrho_0=\infty$, sarà

$$2\pi\left(\frac{\tau}{T}-\frac{\alpha_0\xi+\beta_0\eta+\gamma_0\zeta}{\lambda}+\delta'\right).$$

Affinchè, ora, una vibrazione originata nel supposto punto infinitamente lontano sia percepibile nel punto (ξ,η,ζ), al finito, è necessario che la forza viva corrispondente sia infinita e dell'ordine di grandezza di r_0^2, ossia che $\frac{a}{r_0}$ sia finito. Poichè, poi, al variare di (ξ,η,ζ), restando sempre al finito, $\frac{a}{r_0}$ varierebbe di quantità infinitamente piccole, rispetto ad essa, si deve ritenere che, nelle stesse circostanze, il rapporto $\frac{a}{r_0}$ rimane costante. Quando, dunque, A_0 tende all'infinito nella maniera indicata, la (1) dev'essere sostituita dall'altra formola

$$\varphi = a'\cos 2\pi\left(\frac{\tau}{T}-\frac{\alpha_0\xi+\beta_0\eta+\gamma_0\zeta}{\lambda}+\delta'\right) \tag{3}$$

a' essendo una nuova costante.

Se poi si suppone che A_0, in ogni sua posizione al finito e, quindi, anche al limite, emetta, non una sola vibrazione armonica, ma un gruppo qualunque di tali vibrazioni, al posto della (1), si avrà la formola più generale

$$\varphi = \frac{1}{r_0}F\left(\tau-\frac{r_0}{C}\right), \tag{4}$$

F essendo il simbolo di una determinata funzione e C la velocità di propagazione del moto all'interno del fluido; mentre, al limite, per A_0 tendente all'infinito, nelle stesse condizioni di prima, al posto della (3), si avrà la formola

$$\varphi = \Phi\left(\tau-\frac{\alpha_0\xi+\beta_0\eta+\gamma_0\zeta}{C}\right) \tag{5}$$

Φ essendo il simbolo di un'altra determinata funzione.

1'. Torniamo ora al caso delle onde elettromagnetiche. Il campo determinato dal centro di scuotimento A_0, al finito, è rappresentato dalle formole (1), ovvero (1'), dalla Nota citata. Quando, poi, si supponga che il centro A_0 tenda all'infinito nel senso negativo di una retta i cui coseni di direzione sieno $\alpha_0 , \beta_0 , \gamma_0$, come precedentemente, con considerazioni analoghe alle precedenti, si trova che il campo, al limite, sarà rappresentato dalle formole

$$(6) \qquad \mathfrak{E}_0 = \operatorname{rot}^2 \mathfrak{p} = -\Delta^2 \mathfrak{p} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{p} \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \tau} ,$$

$\mathfrak{p}$ essendo un vettore funzione dell'argomento

$$\tau - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta}{C} .$$

Come al solito, $\mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0$ sono le forze elettrica e magnetica; ε , μ le due costanti caratteristiche del mezzo (costante dielettrica e permeabilità magnetica) e C la velocità di propagazione delle onde.

Le (6) sono equivalenti alle altre

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 = \dfrac{1}{C^2} r_0 \wedge (r_0 \wedge \mathfrak{p}'') = \dfrac{1}{C^2} [-\mathfrak{p}'' + r_0 (r_0 \times \mathfrak{p}'')] , \\ \mathfrak{H}_0 = -\dfrac{1}{C^2} \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} r_0 \wedge \mathfrak{p}'' \end{cases}$$

r_0 essendo il vettore unitario di componenti $\alpha_0 , \beta_0 , \gamma_0$ e $\mathfrak{p}''$ indicando la derivata seconda di $\mathfrak{p}$ rispetto a τ. E, dalle (7), si deduce

$$(8) \qquad \mathfrak{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} r_0 \wedge \mathfrak{H}_0 \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} r_0 \wedge \mathfrak{E}_0 .$$

Le formole (7) non subiscono nessuna ulteriore semplificazione in conseguenza dell'ipotesi che le radiazioni emesse da A_0 corrispondano a lunghezze d'onda infinitamente piccole. Esse rappresentano anche la soluzione più generale delle equazioni di Maxwell per onde piane propagantesi nel senso positivo di una retta di coseni direttori $\alpha_0 , \beta_0 , \gamma_0$. E l'osservazione fatta sopra è conforme al fatto noto che la teoria delle onde piane vale inalterata per ogni campo elettromagnetico indipendentemente dall'ordine di grandezza delle lunghezze d'onda delle vibrazioni che in esso si propagano.

2. Principio di Huygens in un campo elettromagnetico prodotto da un centro di scuotimento infinitamente lontano. — Le formole (5) della Nota citata valgono, evidentemente, anche nel caso in cui il centro di scuotimento A_0 è infinitamente lontano; soltanto, per $\mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0$, nei primi membri, bisognerà porre le espressioni (7) del numero precedente. Se, poi,

il campo elettromagnetico è quello generato da questo solo centro di scuotimento, bisognerà, pure, porre, negli integrali, al secondo membro, $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$, al posto di $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$. In questa ipotesi, valendoci delle (8), possiamo far comparire, in ciascuna delle due formole che determinano $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, lo stesso vettore $\mathfrak{E}$ od $\mathfrak{H}$ solamente. Limitandoci a scrivere la prima di queste formole, avremo

$$(9)\qquad \mathfrak{E}(x,y,z,t) = \mathfrak{E}_0(x,y,z,t) +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Big\{ \mathrm{r}\wedge\Big[\mathrm{n}\wedge\Big(\frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathfrak{E}_0' + \mathfrak{E}_0\Big)\Big] - \frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathrm{n}\wedge(\mathrm{r}_0\wedge\mathfrak{E}_0') -$$

$$- \mathrm{r}\Big[\mathrm{n}\times\Big(\frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathfrak{E}_0' + \mathfrak{E}_0\Big)\Big]\Big\}_{\tau=t-\frac{r}{\mathrm{C}}}\frac{d\sigma}{r^2},$$

r essendo sempre il vettore unitario di componenti $\frac{\partial r}{\partial\xi}, \frac{\partial r}{\partial\eta}, \frac{\partial r}{\partial\zeta}$, n un vettore unitario normale a σ, r la distanza dei due punti (ξ,η,ζ) ed $\mathrm{A}\equiv(x,y,z)$, e l'accento, sul vettore $\mathfrak{E}_0$, indicando la derivata di questo vettore rispetto a τ. Aggiungiamo ancora che la (9) vale nell'ipotesi che la superficie σ non separi i due punti A_0 ed A; quando quest'ultimo caso si avvera, bisogna sopprimere, nel secondo membro, il termine $\mathfrak{E}_0$ fuori dell'integrale.

2'. Nel caso in cui il punto A_0, infinitamente lontano, è un centro luminoso, la (9) si semplifica perchè, con le solite considerazioni, si trova che, in essa, si possono trascurare i termini che contengono $\mathfrak{E}_0$ rispetto a quelli che contengono $\mathfrak{E}_0'$. In questo caso si può porre $\varepsilon=\mu=1$, $\mathrm{C}=c$, e la (9) si riduce all'altra

$$(10)\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{4\pi c}\int_\sigma \Big\{ \mathrm{r}\wedge(\mathrm{n}\wedge\mathfrak{E}_0') -$$

$$- \mathrm{n}\wedge(\mathrm{r}_0\wedge\mathfrak{E}_0') - \mathrm{r}(\mathrm{n}\times\mathfrak{E}_0')\Big\}_{\tau=t-\frac{r}{c}}\frac{d\sigma}{r} =$$

$$= \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{4\pi c}\int_\sigma \Big\{ (\cos\widehat{r_0 n} - \cos\widehat{rn})\,\mathfrak{E}_0' -$$

$$- (\mathrm{r}+\mathrm{r}_0)(\mathrm{n}\times\mathfrak{E}_0') + \mathrm{n}(\mathrm{r}\times\mathfrak{E}_0')\Big\}_{\tau=t-\frac{r}{c}}\frac{d\sigma}{r}$$

$\widehat{r_0 n}$ ed $\widehat{rn}$ essendo gli angoli che i vettori r_0 ed r formano con n. E, se A_0 emette luce monocromatica, per cui

$$\mathfrak{E}_0 = a\cos 2\pi\Big(\frac{\tau}{\mathrm{T}} - \frac{\alpha_0\xi+\beta_0\eta+\gamma_0\zeta}{\lambda} + \delta\Big)$$

a essendo un vettore costante normale ad r_0, la (10) si riduce alla

$$(11)\quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{1}{2\lambda}\int_\sigma \Big\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{rn})\, a - (r + r_0)\,(n \times a) + \\ + n\,(r \times a) \Big\} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta + r}{\lambda} + \delta \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

3. Valutazione di integrali. — La formola (11) può adoperarsi allo stesso modo dell'analoga corrispondente al caso in cui A_0 è al finito, a giustificare le leggi dell'ottica geometrica e a spiegare fenomeni di diffrazione. Per raggiungere questi scopi, bisogna risolvere una quistione fondamentale: quella di calcolare o, almeno, di valutare l'ordine di grandezza dell'integrale che compare al secondo membro della (11) stessa. La quistione è stata trattata in modo completo da Kirchhoff, nel caso in cui A_0 è al finito, applicando, al suo scopo, il metodo col quale Dirichlet ha studiato il problema della convergenza delle serie di Fourier e che contiene la sostanza del procedimento per zone di Fresnel. Conviene, e, nel nostro caso, è indispensabile, presentare le considerazioni di Kirchhoff in maniera più generale. supponendo che il fattore di $\frac{2\pi}{\lambda}$, nell'argomento del sen, sotto l'integrale a secondo membro della (11), sia una funzione u di ξ, η, ζ perfettamente arbitraria. ma con derivate finite. Si noti, per ciò, che l'equazione $u(\xi, \eta, \zeta) = \text{cost.}$ rappresenta una serie di superficie che, nel nostro caso speciale, sono paraboloidi di rotazione confocali. Si noti, pure, che si può far variare comunque σ, purchè. nel caso che σ abbia un contorno. questo contorno resti fisso ed il centro luminoso col punto d'osservazione restino sempre dalla stessa banda o da bande opposte di σ senza mutare il valore dell'integrale esteso a σ; per cui possiamo sempre supporre che σ non abbia nessuna parte in comune con una superficie $u = \text{cost.}$ e che non sia tangente ad una tale superficie in un punto interno ad essa o del suo contorno.

Per calcolare il nostro integrale si può, se occorre, spezzarlo in parti in modo che ogni sua parte sia estesa ad una parte di σ tale che, per essa, una delle coordinate, per es. ζ, si possa considerare come funzione univoca delle altre due ξ e η. Si può, quindi, introdurre su σ un sistema di linee coordinate u e v di cui il primo sistema sia formato dalle linee d'intersezione di σ con le superficie $u = \text{cost}$ e servirsi di u e v, come variabili d'integrazione, per calcolare il nostro integrale, o ciascuna delle sue parti. Affinchè ciò sia possibile bisogna poter determinare una funzione $v(\xi, \eta)$ tale che il determinante

$$\frac{d(u, v)}{d(\xi, \eta)}$$

sia diverso da zero, almeno, sulla parte di σ a cui è esteso l'integrale, e

u dovendosi considerare come funzione di ξ e η con l'intervento dell'equazione della superficie σ. Si richiede perciò che in nessun punto del campo di integrazione sia

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0.$$

Tenendo conto delle restrizioni imposte a σ, si trova subito che le equazioni precedenti potranno essere soddisfatte solo se, in un punto del campo d'integrazione, è $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$, ovvero se il contorno di σ ha una parte in comune con una superficie $u = \text{cost.}$. Quest'ultima ipotesi, però, sarà da noi esclusa.

Quando le derivate parziali di u non sono tutte e tre nulle contemporaneamente in nessun punto del campo d'integrazione e in nessun punto vicinissimo al suo contorno, seguendo il procedimento di Kirchhoff, si vedrebbe che il nostro integrale, almeno nei casi più comuni. è dell'ordine di grandezza di λ e, quindi, trascurabile (1).

4. Sui fenomeni di diffrazione e, specialmente, su quelli di Fraunhofer. — I casi in cui le tre derivate parziali di u si annullano contemporaneamente in qualche punto vicinissimo al contorno di σ, corrispondono a quei casi in cui si possono osservare fenomeni di diffrazione. In questi casi, per determinare le condizioni ottiche in A, bisogna calcolare il valore dell'integrale che compare nel secondo membro della (11), che non è più trascurabile. Volendo restare nell'àmbito dei soli casi che sono più comunemente considerati, supporremo che A ed A_0 sieno separati da uno scherma piano perfettamente assorbente per le radiazioni luminose (perfettamente nero) e che in esso sia praticato un foro di dimensioni così piccole che. nella porzione di piano da esso limitato, si possano considerare costanti tutte le quantità che compaiono sotto l'integrale tranne quella che è divisa per λ. E supporremo allora, anche, che il piano dello scherma coincida col piano $\zeta = 0$. L'integrale sarà, quindi, esteso alla porzione di questo

(1) Ne discende che l'ordine di grandezza di un integrale della forma

$$\int_\sigma G \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{u}{\lambda} + \delta\right) d\sigma \,,$$

esteso ad una porzione σ del piano $\zeta = 0$, con λ infinitesimo e G ed u funzioni di ξ, η con derivate finite, dipende esclusivamente dai punti in cui si annullano contemporaneamente $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Se $u(\xi, \eta)$ è nota in tutto il piano e possiede un solo di questi punti eccezionali, l'integrale stesso può estendersi ad una porzione maggiore qualunque del piano senza alterare il suo ordine di grandezza rispetto a λ. È permesso anche. nello stesso senso, sostituire ad u un'altra funzione v della stessa natura purchè coincida con u nell'intorno del punto eccezionale.

piano limitata dal foro dello scherma. Poichè, poi, per poter applicare la teoria tradizionale approssimata della diffrazione, la retta di coseni direttori α_0, β_0, γ_0, uscente da A, deve passare nelle vicinanze del contorno di σ, sarà lecito, come nel caso in cui A_0 è al finito, porre

$$\mathrm{r} + \mathrm{r}_0 = 0 \quad , \quad \mathrm{r} \times \mathrm{a} = 0 \quad , \quad \cos \widehat{r_0 n} = - \cos \widehat{rn}$$

e la (11) ci darà

$$(12) \qquad \mathfrak{E} = \frac{\cos \widehat{rn}}{\lambda r} \, \mathrm{a} \int_\sigma \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + r}{\lambda} + \delta \right) d\sigma \, .$$

Limitandoci a considerare luce incidente normalmente allo scherma, avremo, più semplicemente,

$$(12') \qquad \mathfrak{E} = \frac{\cos \widehat{rn}}{\lambda r} \, \mathrm{a} \int_\sigma \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right) d\sigma \, .$$

Quando, ora, si osserva un fenomeno di diffrazione con l'aiuto di uno strumento ottico, risulta evidente che le condizioni ottiche, nel punto A di osservazione, dipendono, oltre che dalla posizione relativa di A rispetto allo scherma diffrangente, anche dalla linea di mira. Indicheremo i coseni di direzione di questa retta, ossia le componenti di r, con α, β, γ. I primi due di questi coseni sono infinitesimi e tali sono da considerarsi anche ξ e η, se scegliamo l'origine in un punto interno al foro. D'ordinario, poi, quando si passa a calcolare l'integrale che compare nella (12), o (12'), o integrali analoghi, si tien conto soltanto dei termini d'ordine più basso in ξ e η che provengono dallo sviluppo del fattore di $\frac{2\pi}{\lambda}$ nell'argomento del seno. Nel nostro caso, ponendo $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, potremo scrivere

$$r = \varrho \left[1 - \frac{2}{\varrho^2} (x\xi + y\eta) + \frac{1}{\varrho^2} (\xi^2 + \eta^2) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varrho \left[1 + \frac{2}{\varrho} (\alpha\xi + \beta\eta) + \frac{1}{\varrho^2} (\xi^2 + \eta^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \varrho + \alpha\xi + \beta\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\varrho}$$

se teniamo conto soltanto dei termini di second'ordine in ξ e η e di quelli di prim'ordine quando sono moltiplicati per α o β.

Si distinguono, com'è noto, due categorie di fenomeni di diffrazione: quelli di Fresnel e quelli di Fraunhofer. Dal punto di vista analitico, i fenemeni di Fresnel sono caratterizzati dal fatto che i termini d'ordine più basso, nell'argomento del seno, sono di secondo grado, mentre, per i feno-

meni di Fraunhofer, questi termini sono di primo grado. Accadrà il primo caso quando α e β sono infinitesimi d'ordine eguale o maggiore di ξ e η; accadrà, invece, il secondo caso quando α e β sono infinitesimi d'ordine minore di ξ e η, o per valersi di ϱ infinitamente grandi. Queste particolarità, a rigore, possono verificarsi tanto nel caso in cui il centro luminoso A_0 è infinitamente lontano, quanto in quello in cui A_0 è al finito. Possiamo, però, notare che se A_0 è infinitamente lontano, non si possono produrre fenomeni di Fresnel, e ciò nel senso che, nelle corrispondenti ipotesi, il campo d'osservazione non potrebbe essere più grande del foro diffrangente stesso, ossia infinitesimo.

Geometria. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette* (1). Nota II del Corrisp. GUIDO FUBINI.

5. *Complessi lineari.* Usiamo coordinate omogenee tali che la prima x di esse valga 1; sarà $x_{rs} = X = 0$ e per (16) $b_{rs} = \lambda c_{rs}$ ove $\lambda = -\xi$. Supponiamo poi di scegliere a parametri u_1, u_2, u_3 le ultime tre coordinate proiettive p, q, r. Ricordando la definizione delle derivate covarianti, avremo per (16)

$$\begin{pmatrix} hk \\ 1 \end{pmatrix} = -p_{hk} = -\Big[a_{hk} P + e_{hk}(\pi + \lambda p)\Big]; \quad \begin{pmatrix} hk \\ 2 \end{pmatrix} = -a_{hk} Q - c_{hk}(\varkappa + \lambda q);$$

$$\begin{pmatrix} hk \\ 3 \end{pmatrix} = -a_{hk} R - c_{hk}(\varrho + \lambda r);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_k} = y_{hk} + \Sigma \begin{pmatrix} hk \\ r \end{pmatrix} y_r = a_{hk}\Big[Y - p y_1 - q y_2 - r y_3\Big] +$$

$$+ c_{hk}\Big[\eta + \lambda y - (\pi + \lambda p) y_1 - (\varkappa + \lambda q) y_2 - (\varrho + \lambda r) y_3\Big]$$

che, con notazioni, che si spiegano da sole, noi scriveremo

$$(23) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_k} = a_{hk} \overline{Y} + c_{hk} \overline{\eta} \text{ insieme all'analoga } \frac{\partial^2 z}{\partial u_h \partial u_k} = a_{hk} \overline{Z} + c_{hk} \overline{\zeta}.$$

Dimostriamo che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un complesso sia lineare è che la forma χ sia nulla.* La $(16)_{bis}$ dimostra che la condizione è necessaria. Viceversa se $\chi = 0$, cioè $c_{hk} = 0$, la (23) dimostra che, se $\overline{Y} = 0$, le derivate seconde di y sono nulle; cioè y è funzione lineare di $p = u_1, q = u_2, r = u_3, x = 1$; e il complesso è lineare. Invece, se $\overline{Y} \neq 0$, le (23) dimostrano che si può trovare una quantità μ tale che

(1) In questi Rendiconti, vol. XXVII, 2° sem. 1918, pp. 304-311.

$\frac{\partial^2 z}{\partial u_h \partial u_k} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_k} = 0$. Derivando rispetto u_t, e sottraendone il risultato ottenuto permutando k con t, si trova $\mu_t \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_k} - \mu_k \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_t} = 0$; cioè per (23) e per la $\overline{Y} \neq 0$, si trae $\mu_t a_{hk} - \mu_k a_{ht} = 0$. E poichè $\Delta \neq 0$, sarà $\mu_t = 0$, cioè $\mu = \text{cost}$. Cosicchè $z - \mu y$ è funzione lineare delle u_i, 1, cioè delle p, q, r, x. E il complesso è ancora lineare.

Uno studio ben facile da farsi in generale sarebbe quello di studiare coi nostri metodi tutte le congruenze contenute in un dato complesso, e trovare le relazioni tra i loro invarianti proiettivi. Noi ci accontenteremo di provare che: *Se tutte le congruenze di un dato complesso sono* W, *il complesso è lineare.* Una congruenza del complesso si ottiene ponendo u_3 uguale ad una funzione $f(u_1, u_2)$ delle u_1, u_2: essa sarà W *se il determinante delle* $x, \frac{dx}{du_r}, \frac{d^2x}{du_h du_k}$ (per $h, k = 1, 2$) *è nullo.* Scrivo i d anzichè i ∂, per ricordare che nel derivare si deve considerare u_3 come funzione delle u_1, u_2. Sarà:

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du_k} = \dfrac{\partial x}{\partial u_k} + x_3 \dfrac{\partial f}{\partial u_k} \qquad \text{(e analoghe in } y, z \text{ ecc.)} \qquad (h, k = 1, 2) \\ \dfrac{d^2x}{du_h du_k} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_h \partial u_k} + \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} \dfrac{\partial f}{\partial u_h} \dfrac{\partial f}{\partial u_k} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u_h \partial u_3} \dfrac{\partial f}{\partial u_k} + \\ \qquad + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u_k \partial u_3} \dfrac{\partial f}{\partial u_h} + \dfrac{\partial z}{\partial u_3} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_h \partial u_k}. \end{cases}$$

Posto

$$\alpha_{hk} = a_{hk} + a_{33} \frac{\partial f}{\partial u_h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + a_{3h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + a_{3k} \frac{\partial f}{\partial u_h},$$

$$\gamma_{hk} = c_{hk} + c_{33} \frac{\partial f}{\partial u_h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + c_{3h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + c_{3k} \frac{\partial f}{\partial u_h},$$

sarà per (23)

$$\frac{d^2 f}{du_h du_k} = \alpha_{hk} \overline{Y} + \gamma_{hk} \overline{\eta} + \frac{\partial y}{\partial u_3} \frac{\partial^2 f}{\partial u_h \partial u_k} \quad \text{(e analoga in } z).$$

Essendo $x = 1, p = u_2, q = u_2, r = f$, il determinante che deve essere nullo, affinchè la congruenza sia W, si riduce a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \\ \frac{d^2 y}{du_1^2} & \frac{d^2 y}{du_1 du_2} & \frac{d^2 y}{du_2^2} \\ \frac{d^2 z}{du_1^2} & \frac{d^2 z}{du_1 du_2} & \frac{d^2 z}{du_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} & \alpha_{11} & \gamma_{11} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} & \alpha_{12} & \gamma_{12} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} & \alpha_{22} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_3 & \overline{Y} & \overline{\eta} \\ z_3 & \overline{Z} & \overline{\zeta} \end{vmatrix}$$

Se il primo fattore del secondo membro è nullo *qualunque sia* f (cioè per ogni congruenza), allora le α sarebbero proporzionali alle γ, le a alle c, la φ alla χ; e per le relazioni (18) di coniugio sarebbe $\chi = 0$; e quindi il complesso *sarebbe lineare*. Se invece fosse nullo il secondo fattore, da (23) seguirebbe che le $\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_j}$ (coi ∂ storti) sarebbero proporzionali alle $\frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j}$; e, come sopra, si troverebbe ancora che il complesso è lineare.

Le formole qui svolte possono essere utili allo studio delle congruenze contenute in un dato complesso.

6. *Congruenze.* Abbiamo due complessi ξ, ξ' definiti da (12):

$(12)_{bis}$ $\xi = D_2 x + x\,S\,X\,D_2 x$ (ove si ponga $du_s = R_s$) (e analoghe in η, ecc.)

$(12)_{ter}$ $\xi' = D_2 x + x\,S\,X\,D_2 x$ (ove si ponga $du_s = R'_s$).

Se le $x, y, \ldots$ non fossero normali, si noterebbe che le ξ, ξ' restano moltiplicate per ϱ, quando le $x, y, \ldots$ si moltiplicano per un fattore ϱ.

L'espressione

$$(25) \qquad W = \frac{1}{\Delta^2}(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}) \quad (1)$$

è nulla per tutte e sole le congruenze W, *non muta cambiando le variabili coordinate* u_r (è *intrinseca*) e resta moltiplicata per $\frac{1}{\varrho^2}$ se moltiplichiamo le $x, y, \ldots$ per ϱ, e quindi φ per ϱ^2, Δ per ϱ^4. *Escluse le congruenze* W (da riguardarsi come *anormali*), i calcoli si presentano nel modo più semplice, se noi scegliamo ϱ *in guisa che* W *sia l'unità.* Avremo così completamente determinate sia le coordinate *normali* di una retta della congruenza, sia *la forma* φ, *che, assunta come elemento lineare, definisce una metrica completamente individuata dalla congruenza, e che si conserva per trasformazioni proiettive.* Evidentemente il determinante

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, X, \xi, \xi') = \frac{\Delta^2 W}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{11}}{2} & A_{12} & \frac{A_{22}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & R_1^2 & 2R_1 R_2 & R_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & R_1'^2 & 2R'_1 R'_2 & R_2'^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta^2}{\sqrt{\Delta}} W(R_1 R'_2 - R_2 R'_1)(A_{11} R_2 R'_2 - A_{12}[R_1 R'_2 + R_2 R'_1] + A_{22} R_2 R'_2) = iW$$

(1) Chiamo W questa espressione appunto perchè essa è nulla per le congruenze W (congruenze di rette, le cui coordinate soddisfano a una stessa equazione lineare omogenea del 2° ordine).

in virtù delle (14). Cioè

$$(26) \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, X, \xi, \xi')\right]^2 = -W^2 = -1.$$

Il primo membro si riconosce subito (per la regola che insegna a formare il quadrato di un determinante) uguale, in virtù delle (1), (2), (4), (10), (13), a un determinante, che facilmente si calcola essere $-(S\xi^2 S\xi'^2 - [S\xi\xi']^2)$. Quindi:

$$(26)_{bis} \qquad S\xi^2 S\xi'^2 - (S\xi\xi')^2 = 1.$$

Porremo:

$$(27) \quad \bar{\xi} = \xi S\xi\xi' - \xi' S\xi^2 \quad ; \quad \bar{\xi}' = \xi' S\xi\xi' - \xi S\xi'^2 \text{ e analoghe in } \bar{\eta}, \text{ ecc.}$$

(Se le x, y non fossero normali, porremmo $\bar{\xi} = \dfrac{\xi S\xi\xi' - \xi' S\xi^2}{\sqrt{S\xi^2 S\xi'^2 - (S\xi\xi')^2}}$, ecc. Le $\bar{\xi}, \bar{\xi}'$ così definite resterebbero come le ξ, ξ' moltiplicate per ϱ, quando si moltiplichino per ϱ le x, ecc.). Sarà per (26) e (27)

$$(28) \quad S\bar{\xi}^2 = S\xi^2 \; ; \; S\bar{\xi}'^2 = S\xi'^2 \; ; \; S\bar{\xi}\,\bar{\xi}' = -S\xi\xi' \; ; \; S\xi\bar{\xi} = S\xi'\bar{\xi}' = 0.$$

I complessi $\bar{\xi}, \bar{\xi}'$ sono quei complessi del fascio determinato dai complessi ξ, ξ', che sono in involuzione con ξ e ξ'; cosicchè i complessi $\xi, \xi', \bar{\xi}, \bar{\xi}'$ appartengono a uno stesso fascio in involuzione coi complessi x, x_1, x_2, X. In questo fascio esistono i complessi $\xi + i\bar{\xi}$ che sono evidentemente speciali. Cioè, essendo per (28) $S(\xi \pm i\bar{\xi})^2 = 0$, *le due rette aventi per coordinate $\xi \pm i\bar{\xi}$ sono le direttrici della congruenza comune al fascio dei complessi $\xi, \bar{\xi}, \xi', \bar{\xi}'$ e quindi sono le due rette comuni ai complessi x, x_1, x_2, X. Esse sono le rette* (1) *tangenti coniugate della x alle due falde focali* (rette focali o principali) *e le rette $x + \beta(\xi \pm i\bar{\xi})$ descrivono, al variare di β i due fasci di rette focali* (tangenti alle falde focali). *I due fasci coniugati, cioè i fasci di rette che hanno per centro il centro di un fascio focale e per piano il piano dell'altro fascio sono i cosiddetti fasci centrali. I complessi $\bar{\xi}$ e $\bar{\xi}'$ sono i complessi che chiameremo satelliti o di accompagnamento, che contengono i fasci centrali corrispondenti a un punto di una falda focale e ai punti infinitamente vicini. La involuzione determinata nei fasci focali dalle intersezioni coi due complessi $\Sigma x_{ij} R_i dx_j$ e $\Sigma x_{ij} R'_j dx_j$ è la involuzione delle tangenti coniugate alle falde focali. (I fasci focali costituiscono l'intersezione dei*

(1) Per questi teoremi cfr. Wälsch, Wiener Sitzungsberichte, 1891, IIA, Tomo 100. I complessi $\bar{\xi}, \bar{\xi}'$ sono i *Begleitcomplexe* del Wälsch.

complessi x, x_1, x_2). Di questo fatto ci potremmo servire per scrivere le equazioni differenziali delle assintotiche alle falde focali (più complicato, ma non difficile, è il problema di scrivere tutte le altre forme relative alle falde focali).

Oltre a W noi abbiamo trovato in $\Sigma\xi^2 . \Sigma\xi'^2 , \Sigma\xi\xi'$ (legati dalla 26_{bis}) altri invarianti di una congruenza. Per trovare il sistema completo di tali invarianti, e le loro mutue relazioni, dobbiamo però ora seguire una via più analitica.

Potremmo cercare delle formole $x_{rs} - a_{rs} X = b_{rs}\xi + c_{rs}\xi' + g_{rs} x$, come per il caso dei complessi, e cercar poi di dedurne le derivate delle X , ξ , ξ'. Per questa via troveremmo, oltre alla φ, le forme $\Sigma b_{rs}\, du_r\, du_s$, $\Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$, $\Sigma g_{rs}\, du_r\, du_s$ per definire una congruenza. Noi preferiamo seguire altra via, e otterremo, oltre alle φ, *una sola* forma Φ di *quarto* grado. E, volendo, non sarebbe difficile sostituire a Φ delle forme di *secondo* grado. Infatti ogni forma di quarto grado, col procedimento già da me studiato altrove di *divisione covariante*, si può scrivere in uno e in un solo modo nella forma $\Phi = I\varphi^2 + \psi\varphi + \chi\bar{\chi}$, ove $\psi , \chi , \bar{\chi}$ sono forme di *secondo* grado coniugate alla φ, e le $\chi , \bar{\chi}$ sono coniugate tra loro. (Se p. es. $\varphi = 2a_{12}\, du_1\, du_2$, cioè se le u_1 , u_2 sono le sviluppabili della congruenza, la ψ sarebbe del tipo $b_{11}\, du_1^2 + b_{22}\, du_2^2$ e le $\chi , \bar{\chi}$ del tipo $c_{11}\, du_1^2 \mp c_{22}\, du_2^2$). Cosicchè, invece di dare la Φ, si potrebbero dare l'invariante I, e le due forme ψ , χ. (L'invariante I resta determinato dalla $W^2 = 1$, quando sieno date le forme φ , ψ , χ).

7. *La forma Φ di quarto grado.* Ricordando la (8) porremo:

$$\Phi = \Sigma k_{rspq}\, du_r\, du_p\, du_s\, du_q = S\, dx\, D_3 x = -S(D_2 x)^2 . \tag{29}$$

Per le regole di derivazione coi differenziali controvarianti è

$$S\, dx\, d^3x = \Sigma a_{rs}\, du_r\, \delta^3 u_s + \Phi \;;\; S(d^2x)^2 = \Sigma a_{rs}\, \delta^2 u_r\, \delta^2 u_s - \Phi . \tag{30}$$

La somma delle (30) dà $\frac{1}{2} d^2\varphi = \Sigma a_{rs}\, du_r\, \delta^3 u_s + \Sigma a_{rs}\, \delta^2 u_r\, \delta^2 u_s$, che è un'identità già da me trovata al loc. cit. Ognuna delle (30) dà una nuova definizione di Φ. Tutte queste definizioni dimostrano che Φ è, come φ, *una forma intrinseca*; cosicchè essa *è completamente determinata* se le $x , y \ldots$ sono coordinate normali; se le coordinate non fossero normali, allora, moltiplicando $x , y , \ldots$ per ϱ essa si muterebbe in

$$\bar{\Phi} = \varrho^2\Phi + \varphi^2 \Delta_1\varrho + 2\varphi(\varrho\, D_2\varrho - 2d\varrho^2) . \tag{9_{bis}}$$

Indicati con (rs , hk) i simboli di Riemann a quattro indici per φ, una nota formola del Ricci di calcolo assoluto dà l'identità

$$x_{rst} - x_{rts} = -\sum_{p,q} (st , rp)\, A_{pq}\, x_q . \tag{31}$$

Se ne deduce, posto (cfr. le 21)

$$h_{rspq} = -\,\mathrm{S}x_{rs}\,x_{pq} = \mathrm{S}x_r\,x_{pqs} \tag{32}$$

che: *Le h_{rspq} sono simmetriche nei quattro indici, eccettuato $h_{1122} = h_{2211}$ e $h_{1212} = h_{2112} = h_{2121} = h_{2112}$ per cui vale la*

$$h_{1212} - h_{1122} = (21,21). \tag{33}$$

Confrontando con (29), e ricordando che le k sono *simmetriche* nei quattro indici, si deduce:

$$k_{iiij} = h_{iiij} \quad (i,j = 1,2) \quad ; \quad h_{1212} = k_{1122} + \tfrac{1}{3}(21,21); \tag{34}$$

$$h_{1122} = k_{1122} - \tfrac{2}{3}(21,21).$$

Date le forme Φ, φ, tutte le h ne risultano determinate.

Dalla (25) si deduce subito il valore di W^2 (che noi abbiamo posto uguale ad 1)

$$\mathrm{W}^2 = \frac{1}{\Delta^3}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & h_{1111} & h_{1112} & h_{1122} \\ a_{12} & h_{1211} & h_{1212} & h_{1222} \\ a_{22} & h_{2211} & h_{2212} & h_{2222} \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Io dico che anche

$$\mathrm{W}^2 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} \\ a_{11} & \mathrm{H}_{1111} & \mathrm{H}_{1112} & \mathrm{H}_{1122} \\ a_{12} & \mathrm{H}_{1211} & \mathrm{H}_{1212} & \mathrm{H}_{1222} \\ a_{22} & \mathrm{H}_{2211} & \mathrm{H}_{2212} & \mathrm{H}_{2222} \end{vmatrix} \tag{35$_{bis}$}$$

ove

$$\mathrm{H}_{rspq} = \sum_{i,j} \mathrm{A}_{ri}\,\mathrm{A}_{sj}\,h_{ijpq}\,. \tag{36}$$

Infatti, moltiplicando il secondo membro di (35$_{bis}$) per

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^2 & 2a_{11}\,a_{12} & a_{12}^2 \\ 0 & a_{11}\,a_{12} & a_{11}\,a_{22} + a_{12}^2 & a_{12}\,a_{22} \\ 0 & a_{12}^2 & 2a_{22}\,a_{12} & a_{22}^2 \end{vmatrix},$$

si trova il determinante del secondo membro di (35).

Così si trovano anche i precedenti invarianti [legati da (26$_{bis}$) se $\mathrm{W}^2 = 1$]

$$\mathrm{S}\xi^2 = -\,\Sigma\, h_{rspq}\,\mathrm{R}_s\,\mathrm{R}_s\,\mathrm{R}_p\,\mathrm{R}_q \;,\quad \mathrm{S}\xi\xi' = -\,\Sigma\, h_{rspq}\,\mathrm{R}_r\,\mathrm{R}_s\,\mathrm{R}'_p\,\mathrm{R}'_q\,, \tag{37}$$

e analoga per $\mathrm{S}\xi'^2$.

Siccome $W \neq 0$ per una congruenza non W, le x, x_s, x_{rs} ecc. formano sei sistemi linearmente indipendenti. Noi potremo scrivere sei quantità qualsiasi, p. es. le x_{rst}, y_{rst}, ecc. come combinazioni lineari di tali sistemi. E noi scriveremo

$$x_{rst} = b_{rst}\, x + \sum_{i,j} h_{rstj}\, A_{ji}\, x_i + \sum_{p,q,i,j} l_{rstpq}\, A_{pi}\, A_{qj}\, x_{ij} \tag{38}$$

(e analoghe in y, ...).

Moltiplicando (38) per x_p e sommando con le analoghe si trova $h_{rstp} = Sx_p\, x_{rst}$. Perciò le h, che figurano in (38), coincidono con le h, da noi già definite precedentemente, e calcolate con le (34). Si noti che da (38) segue essere le b_{rst} simmetriche nei tre indici, le l_{rstpq} simmetriche sia nelle r, s, t, che nelle p, q.

Moltiplicando (38) per $-x$ e sommando con le analoghe, si trova:

$$0 = \sum_{p,q} l_{r\,st\,pq}\, A_{pq}\,. \tag{39}$$

Moltiplicando (38) per $-x_{pq}$ e sommando con le analoghe, si trova:

$$-Sx_{pq}\, x_{rst} = b_{rst}\, a_{pq} + \sum_{\pi,\sigma,i,j} l_{rst\,\pi\sigma}\, A_{\pi i}\, A_{\sigma j}\, h_{ijpq}\,. \tag{39$_{bis}$}$$

I primi membri delle (39$_{bis}$) *sono completamente determinati* dalle φ, Φ. Infatti derivando covariantemente le (33) si deducono tutte le $Sx_{rs}\, x_{pqt} + Sx_{pq}\, x_{rst}$; e [poichè per (31) $Sx_{pq}\, x_{rst}$ è simmetrico sia negli indici p, q, che negli indici r, s, t], anche le $Sx_{pq}\, x_{rsl}$ sono *tutte* date in funzione delle derivate covarianti delle h, e perciò, per (34), sono note, quando sono date le φ, Φ. Date le φ, Φ, le (39) e (39$_{bis}$) costituiscono un sistema di 4 equazioni lineari nelle quattro incognite b_{rst}, $l_{rst\,11}$, $l_{rst\,12}$, $l_{rst\,22}$, in cui il determinante dei coefficienti delle incognite è per (35$_{bis}$) uguale a $W^2 = 1$. Le b, l si determinano anch'esse nel modo più semplice quando sono date le forme φ, Φ. *Date queste forme, è noto il sistema* (38) *di equazioni, che permette di risalire alla congruenza. Le condizioni di integrabilità di tali equazioni sono nel nostro caso l'analogo delle equazioni di Gauss-Codazzi.*

Osservazione. — Le precedenti ricerche si applicano alle congruenze W in quelle loro parti, che non presuppongono $W \neq 0$. Siano costruite per una tale congruenza le forme φ, Φ, che *non* potremo normare coi metodi precedenti. Se

$$Ax_{11} + 2Bx_{12} + Cx_{22} + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x = 0 \tag{40}$$

(e analoghe in y, ...)

è l'equazione (scritta con derivate covarianti) cui soddisfano le coordinate

di retta, allora moltiplicando (40) per x o per x_r, e sommando con le analoghe si trova

$$A a_{11} + 2B a_{12} + C a_{22} = 0 \tag{41}$$

e $a_{r1}\alpha + a_{r2}\beta = 0$; donde, essendo $\Delta \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$; cosicchè (40) è del tipo:

$$A x_{11} + 2B x_{12} + C x_{22} + \gamma x = 0 . \tag{40}_{bis}$$

Altre relazioni sono le $A h_{11ij} + 2B h_{12ij} + C h_{22ij} = 0$ che si trovano, moltiplicando per x_{ij} e sommando con le analoghe. Si possono adottare a rigate u_1, u_2 o le sviluppabili della congruenza, o le caratteristiche di $(40)_{bis}$. In quest'ultimo caso $A = C = 0$; perciò $a_{12} = 0$, $h_{12ij} = 0$; $\varphi = a_{11} du_1^2 + a_{22} du_2^2$; $\Phi = k_{1111} du_1^4 + k_{2222} du_2^4 - 2(21, 21) du_1^2 du_2^2$. Perciò Φ è del tipo $\chi\overline{\chi} + \frac{1}{2}\frac{(21,21)}{-a_{12}^2}\varphi^2$ (cfr. § 6. È $I = \frac{1}{2}\frac{(21,21)}{-a_{12}^2} = \frac{1}{2}$ curvatura di φ). Dare Φ equivale a dare la sola forma quadratica χ coniugata alla φ; la forma ψ del § 6 è nulla. La $(40)_{bis}$ in derivate ordinarie è poi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \gamma x = 0 .$$

Pare che per uno studio completo delle congruenze W (*anormali*) si debba esaminare anche la forma $S d\xi^2$, ove le ξ siano definite dalle $S\xi x = S\xi x_r = S\xi x_{rs} = 0$, cioè siano le coordinate del complesso osculatore.

Astronomia. — *Una pseudo-determinazione della costante d'aberrazione.* Nota I del Corrisp. V. Cerulli.

Insegna l'astronomia elementare che per dedurre da una serie di misure di latitudine di un dato luogo, prese tutte con la medesima stella, la costante f dell'aberrazione, o piuttosto la correzione Δf che ad un valore approssimato di detta costante si compete, bisogna risolvere un sistema di equazioni a 4 incognite, aventi per ciascuna misura la forma:

$$(1)\quad (\Delta\varphi_0 - \Delta\delta) - t\mu - b\cos(\odot + B).\pi - b\sin(\odot + B).\Delta f = \varphi - (\varphi_0 + \Delta\varphi)$$

dove indicano [1]:

φ e φ_0 risp. la latitudine misurata e la latitudine media;
$\Delta\varphi$ la variazione di latitudine dovuta alla polodia;

[1] Se le osservazioni abbracciano un periodo di tempo considerevole p. es. più di un decennio, la (1) va completata del termine di nutazione.

$\Delta\varphi_0$ e $\Delta\delta$ risp. la correzione della φ_0 assunta e della δ media della stella;
μ il moto proprio della stella, in declinazione;
t il tempo in unità di anno tropico, contato a partire dall'epoca per cui vale la declinazione media della stella;
π e Δf risp. la parallasse della stella e la correzione della costante di aberrazione, servita a calcolare la δ apparente da cui si è tratta la φ;
$\odot$ la longitudine del Sole;

e le quantità ausiliarie b e B s'intendono determinate dalle relazioni:

$$b \sin B = \sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon \qquad b \cos B = -\cos\alpha \sin\delta ,$$

con α e δ indicando le coordinate della stella, e con ε la obliquità dell'ecclittica. La ragione della formula (1) è ovvia. Essa significa che posta la latitudine *vera* successivamente eguale a $\varphi_0 + \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi$ ed a $\varphi + \Delta\delta + t\mu + b\cos(\odot + B).\pi + b\sin(\odot + B).\Delta f$, queste due espressioni devono equivalersi.

Le 4 incognite che il problema presenta naturalmente associate, sono $(\Delta\varphi_0 - \Delta\delta)$, μ, π e Δf, delle quali la prima si compone di due parti che una sola stella non basta a separare.

I *coefficienti* d'aberrazione e di parallasse, ossia le quantità $b\sin(\odot + B)$ e $b\cos(\odot + B)$ le indicheremo con C e D, e chiameremo φ' la latitudine *calcolata*, vale a dire: $\varphi_0 + \Delta\varphi$. Inoltre indicheremo della incognita $(\Delta\varphi_0 - \Delta\delta)$ la sola prima parte, e la (1) si scriverà:

$$(2) \qquad \Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f = \varphi - \varphi' .$$

I $\Delta\varphi$ che entrano nella costituzione delle φ' non possono considerarsi incogniti, ma devono desumersi dai risultati del servizio internazionale della polodia (1). Potevano (e dovevano anzi) trattarli da incognite gli astronomi di anche soli trenta anni fa, che della polodia non conoscevano altro che il periodo Euler-Chandleriano, in base al quale era loro lecito immaginarsi i $\Delta\varphi$ espressi dalla formula $a\sin\left(\frac{360^\circ t}{1.185} + A\right)$, con t indicando il tempo in unità di anni giuliani, e farli quindi tutti dipendere dalle due sole incognite $\xi = a\cos A$ $\eta = a\sin A$, sostituendo alla (2) l'equazione a 6 incognite:

$$(3) \qquad \Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f + \sin\frac{360^\circ t}{1.185}\cdot\xi + \cos\frac{360^\circ t}{1.185}\cdot\eta = \varphi - \varphi_0 .$$

(1) Il calcolo dei $\Delta\varphi$ si fa dalle x ed y « internazionali », omettendo il termine z. Con ciò si è sicuri di non introdurre nel calcolo quantità che già suppongano un valore definito della costante f. Se questa è, infatti, leggermente erronea, solo z può risentirne.

Ma dopo che la polodia s'è presa a seguire con osservazioni dirette, e s'è visto che essa non è rappresentabile nè con uno nè con pochi termini a parametri fissi, poichè al periodo chandleriano se ne aggiungono parecchi altri con amplitudini variabili, l'idea di sostituire ai $\Delta\varphi$ « internazionali » ossia effettivi, i $\Delta\varphi$ teorici, dipendenti da parametri che dovrebbero determinarsi dalle stesse misure di latitudine che servono a trovar π e Δf, è naturalmente da abbandonare. Basti dire che uno dei periodi più notabili, dopo il chandleriano, è il periodo annuo, i cui effetti possono arrivar a superare la metà di quelli del primo. Or se noi di tal periodo volessimo tener conto con l'aggiungere alla (3) due termini della forma $\sin \odot . \lambda \cos \varrho +$ $+ \cos \odot . \lambda \sin \varrho$, questi si fonderebbero con gli altri due termini annui $(- D\pi - C\Delta f)$ e le (3), così completate, condurrebbero per π e Δf a risultati della forma 0/0 [1].

L'equazione (2) resta quindi nelle 4 incognite $\Delta\varphi_0\ \mu\ \pi\ \Delta f$, ma alla determinazione di queste due ultime, ora che la costante $f = 20'',47$ è già da considerare assai prossima all'esattezza, si oppone, per altra provenienza, la stessa difficoltà che or ora dicemmo originarsi dal periodo annuo della polodia. Le due onde $D\pi$ e $C\Delta f$ interferiscono infatti con altre piccole onde annue, più o meno irregolari, e di *fase incognita*, principali fra cui sono:

a) la rifrazione zenitale esterna, dipendente dal gradiente orizzontale della temperatura;

b) la rifrazione zenitale interna, detta anche rifrazione di camera, che dove l'installazione dell'istrumento non fu curata a dovere, può arrivar anche a superare i decimi di secondo;

c) l'effetto della illuminazione del fondo del cielo, che varia secondo leggi ancora inesplorate, con lo splendore della stella, e si fa sentir a preferenza in quei metodi di misura di φ nei quali alla bisezione della stella con un filo mobile è sostituito il tempo di appulso della stella a un filo fisso (misure in primo verticale, senza micrometro registratore) [2].

Queste tenui onde annue, che insieme costituiscono una vera e propria *perturbazione del Zenit* interessano anch'esse i centesimi di secondo (in generale) e mescolandosi con le onde provenienti dal residuo di aberrazione e dalla parallasse, ne rendono difficilissima la ricognizione a parte. La difficoltà è anzi insuperabile quando le misure di latitudine siano limitate ad una sola stella. Allora si può bensì separare, in forza dell'equazione (2),

[1] Aggiunti nel sistema di equazioni (3) i detti termini, esso basta a determinare *in blocco* le incognite

$$\lambda \sin \varrho - b \cos B . \pi - b \sin B . \Delta f \qquad \lambda \cos \varrho + b \sin B . \pi - b \cos B . \Delta f,$$

vale a dire a darci due sole equazioni fra le quattro quantità $\lambda\ \varrho\ \pi\ \Delta f$.

[2] In questa perturbazione annua del Zenit possiamo immaginar inclusa anche la problematica « rifrazione cosmica » del Courvoisier.

l'effetto dell'aberrazione da quello della parallasse, ma non si riesce a sapere di quanto ciascuno di questi effetti venga alterato dalla perturbazione del zenit.

Allo stato attuale della scienza, dunque, come nessuno più pensa a trovar le parallassi mediante misure di latitudine, così nessuno può ripromettersi un Δf attendibile da latitudini prese con una sola stella (1). Chi per tal via semplicistica fosse riuscito ad un Δf apparentemente buono, accompagnato, cioè, da piccolo error medio, non tarderebbe a riconoscerlo illusorio, quando assoggettasse allo stesso trattamento una seconda stella lontana dalla prima, o anche vicina, ma di altra grandezza. Le due stelle, risentendo diversamente la perturbazione zenitale, darebbero Δf diversi. Solo un complesso di misure, ripartite sopra tutta la zona zenitale, o su almeno quella parte di essa cui corrispondono i maggiori valori del coefficiente di aberrazione (2), potrebbe dar all'astronomo, in capo a molti anni di lavoro, una idea non troppo fallace di quel che sia il vero Δf. Ma è da prevedere che fino a tanto che l'equazione del zenit. e specialmente la parte di essa, proveniente dalla rifrazione esterna, che è quella che resta sempre in opera, non sia conosciuta indipendentemente dalle misure di latitudine, la costante d'aberrazione non riuscirà mai a perfettamente svincolarsene, e resterà indeterminata entro 3 o 4 cent. di secondo, se altri processi, oltre quello delle latitudini, non interverranno a meglio precisarla.

Questa considerazione preliminare è stata fatta per attingervi i criterî d'esame di un lavoro del sig. G. Boccardi, inserito negli Atti della R. Acc. di Torino (3), ed i cui risultati si riportano a pag. 311 del Bulletin astronomique del 1916. Il lavoro s'intitola: *Saggio sulla costante d'aberrazione.*

L'autore aveva a sua disposizione 4 serie triennali di misure di latitudine, fatte a Pino Torinese, sulle stelle β Aurigae, ψ Ursae majoris.

(1) Bradley potè bensì *scoprire* l'aberrazione con una sola stella zenitale (γ Draconis); ma si trattava allora del *grosso* del fenomeno, e di misurar una quantità 1000 volte quella che s'ha da determinar oggi per correggere la costante 20″,47.

(2) Il fattore b del coefficiente d'aberrazione di stelle zenitali, è al suo minimo sotto $\alpha = 6^h$, ed al massimo sotto $\alpha = 18^h$. Tali valori alla latitudine di 45° sono: minimo = 0,37, massimo = 0,93. Però da $\alpha = 14^h$ a $\alpha = 22^h$ b varia appena tra i limiti 0,86 e 0,93, cosicchè può dirsi che la regione zenitale più *favorevole* alla ricerca della costante f abbracci 8 ore di AR.

(3) Classe di scienze fis. ecc. vol. L, pp. 649-671, e vol. LI, pp. 308-317. Sono due Note di cui la seconda è una ripetizione della prima, con materiale di osservazioni un po' più esteso. Ci riferiremo di solito alla seconda.

Dei simulacri di *risposta*, a base d'ingiurie, che si vengono *pro forma* contrapponendo a queste nostre Note, ci vieta d'occuparci il rispetto dovuto all'Accademia e a noi stessi. Solo ci basta avvertire che mal si spera con le contumelie (che disprezziamo) distoglierci dal far ciò che stimiamo nostro preciso dovere, nell'interesse della verità e serietà scientifica.

δ Cygni, α Cygni, e proponendosi, per suo studio, di tentare una determinazione di Δf, la considerazione separata delle quattro stelle gli sarebbe riuscita assai istruttiva, mostrandogli all'atto pratico gli effetti della perturbazione zenitale. I quattro Δf sarebbero risultati differenti tra loro nei *decimi di secondo*: vale a dire così radicalmente diversi, da far subito capire non esser cosa seria il voler presentare uno di essi o anche il loro medio aritmetico, come valore probabile della costante d'aberrazione. Senonchè il Boccardi non solo ha lasciato completamente da banda le due prime stelle, ma ha anche creduto potersi abbreviare della metà la fatica delle altre due, fondendone le osservazioni in medie aritmetiche, con che si è, senza accorgersene, privato di un mezzo prezioso, che pur era a sua disposizione, di saggiare l'attendibilità del suo risultato.

Tuttavia, anche tenuta in tale erronea forma, la ricerca sarebbe potuta servire a qualche cosa, col farci sapere a quale Δf *peculiare* conducono le osservazioni della stella $^1/_2(\alpha + \delta)$ Cygni, poichè si è, come dicevamo, dall'insieme dei Δf peculiari alle diverse stelle, che può trarsi qualche lume circa il *vero* Δf. Ma in realtà è facile accorgersi, esaminando le Note del Boccardi, che egli non è pervenuto neanche alla conoscenza di codesto Δf peculiare, e che, insomma, non ha ottenuto risultato di sorta.

Cominciamo dall'esporre il suo metodo. Nell'equazione (2) ha egli creduto poter omettere i primi tre termini, il primo dei quali $(\Delta\varphi_0)$ effettivamente si elimina, insieme alla φ_0, per la forma di calcolo adottata, ma i due altri, il Boccardi li ha ritenuti nulli *a priori*, sapendo che la stella in quistione non ha parallasse nè moto proprio sensibili. Pertanto, l'opera sua si aggira tutta intorno all'equazioncella:

$$C\Delta f + \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \tag{4}$$

nella quale si risparmia, anzi, di scrivere anche il termine $\Delta\varphi$, come quello che per l'uso che farà dell'equazione, egli crede condannato a sparire.

A prescindere che la stella di cui si tratta ha in realtà un moto proprio [1] non trascurabile, poichè interessa i centesimi di secondo, entro i quali appunto il calcolo s'aggira, l'A. doveva riflettere che della nullità di μ e π non si può decidere che *a posteriori*, cioè dopo effettivamente risolte le (2), poichè uno dei controlli dell'attendibilità di Δf consiste appunto nella *verisimiglianza* dei valori risultanti per quelle altre incognite, specialmente per la parallasse, la cui determinazione si fa *in condizioni identiche* a quelle di Δf. Oltre a ciò, se le osservazioni che si discutono, portano a valori non nulli delle dette incognite accessorie, è certo che il trascurar que-

[1] Nella *Connaissance des temps pour 1919* troviamo registrati i seguenti valori di Newcomb: α Cygni $\mu = -0''{,}002$, δ Cygni $\mu = +0''{,}044$. Il moto proprio della stella fittizia $^1/_2(\alpha + \delta)$ Cygni è dunque $= +0''{,}021$.

ste avrebbe resa insufficiente, e quindi erronea la (2). L'effetto dei termini omessi si sarebbe naturalmente riversato sul termine d'aberrazione, falsificandolo.

Effettivamente, come si vedrà nella nostra II Nota, il calcolo rigoroso avrebbe dato $\mu = +0''.001$, $\pi = -0''.089$ onde l'accorciamento inflitto dal nostro A. alla equazione fondamentale, risulta ingiustificato per il termine di parallasse, senza dire che il valore negativo della parallasse stessa è in questo caso un assurdo, trattandosi di parallasse *assoluta*; ciò che depone tutt'altro che in favore della capacità delle osservazioni che esaminiamo, a darci lumi circa l'incognita Δf.

Ma oltre la licenza presasi col sopprimere la parallasse e il moto proprio, il Boccardi ha anche sbagliato il segno dell'unico termine che lo interessava: quello d'aberrazione! Il coefficiente di tal termine non è $+C$ come vorrebbe la (4), ma $-C$. L'equazione (4) è dunque erronea anche per quest'altro verso. E l'errore è tanto più degno di nota e sostanziale, in quanto, correggendolo, muta di punto in bianco la *natura* del risultato. Non rendendosi conto dei limiti d'indeterminazione del problema, Boccardi s'è creduta lecita l'*opinione* che la costante 20″.47 fosse *troppo piccola*, ed ha voluto che la sua ricerca contribuisse, se non altro, ad avvalorar questa tesi. ben lontano dal sospettare che le sue stesse osservazioni, rimosso l'errore in parola, avrebbero deposto in favore della tesi opposta, che, cioè, la costante 20″.47 è *troppo grande* (1)

Ma per proseguire nel nostro esame, prendiamo pure l'equazione (4) mutilata ed erronea com'essa è, e vediamo l'uso che l'A. ne ha fatto. L'equazione conterrebbe secondo abbiamo detto sopra, la sola incognita Δf, poichè i $\Delta\varphi$ si devono calcolare dalla polodia cognita, i quali $\Delta\varphi$ « internazionali » devon anche servire a dedurre un primo valore della latitudine media φ_0 da tutte le misure di φ di cui l'osservatore dispone. Se non che l'A. del *Saggio*, terminata appena la serie triennale delle sue misure di latitudine, sente il bisogno di riformare la costante d'ab. e non ha tempo di aspettare che la polodia del 1913-15 sia resa di pubblica ragione (2). Di essa pensa egli

(1) L'errore nel segno del coefficiente C è certamente provenuto da maldestro *trasporto* di formula dalla declinazione alla latitudine. Volendo infatti dedurre π e Δf da misure di declinazione (supposta cognita la latitudine), si impiega l'equazione $\delta_0 - \delta_c = \Delta\delta + t_\mu + D\pi + C\Delta f$ dove δ_0 è la declinazione osservata, e δ_c la declinazione calcolata con la costante 20″,47. Ma se si usa la latitudine, bisogna riflettere che la latitudine misurata suppone anch'essa la costante 20″,47, e che quella che non la suppone è la non misurabile latitudine *vera*. Perciò l'analoga dell'equazione precedente, in termini di latitudine, è $\varphi_{vera} - \varphi_{misur.} = \Delta\delta + t_\mu + D\pi + C\Delta f$, formula da cui si elimina la φ_{vera} ponendola $= \varphi_0 + \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi$ e ne risulta la (2) del testo.

(2) La polodia del 1912-15 fu pubblicata dal Wanach nelle Astr. Nach. durante il 1916. Per abbracciare 3 cicli interi l'A. ha dovuto aggiungere alle serie triennali di

poter far a meno, e che siagli lecito supporre che attraverso n periodi interi di Chandler i $\Delta\varphi$ uniformemente distribuiti si compensino. Questa ipotesi equivale all'assumere i $\Delta\varphi$ sinusoidali, e ad ignorar fra gli altri periodi della polodia anche l'essenzialissimo periodo annuo: altro grave errore che vien ad aggiungersi ai notati. In base a cotesto principio l'A. calcola φ_0 facendo la media di tutte le φ trovate giorno per giorno dal giugno 1912 al gennaio 1916 (tre cicli di Chandler), e lascia nella (4) il $\Delta\varphi$ come una seconda incognita, a fianco della incognita principale Δf.

Se ci fermiamo un momento a considerare questo calcolo di φ_0, vediamo che esso equivale a scrivere le N equazioni (4) rispondenti alle N osservazioni singole, che in tutto si possiedono, ed a sommarle trascurando due termini ritenuti *a priori* per nulli. La somma infatti di N equazioni come la (4) è $\Delta f\,\Sigma C + \Sigma\Delta\varphi = \Sigma\varphi - N\varphi_0$, e siccome l'Autore assume $\varphi_0 = \frac{\Sigma\varphi}{N}$, così egli ha trascurato $\Delta f\frac{\Sigma C}{N} + \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}$. Il primo di questi termini è l'effetto residuo dell'aberrazione su φ_0 ed il secondo l'effetto residuo della polodia.

Secondo l'ipotesi dell'A. sarà nullo bensì il secondo, ma non il primo; in realtà poi non è nullo nè l'uno nè l'altro, ed abbenchè l'espressione $\varphi_0 = \frac{\Sigma\varphi}{N}$ dia (essendo N abbastanza grande) una φ_0 relativamente corretta, non bisogna perder di vista che la formula esatta è

$$\varphi_0 = \frac{\Sigma\varphi}{N} - \Delta f\,\frac{\Sigma C}{N} - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}\,.$$

e che quindi l'equazione (4) in virtù del modo come l'A. ha calcolato (o anzi eliminato) φ_0, vien sostituita da quest'altra:

$$\text{(5)} \qquad \left\{C - \frac{\Sigma C}{N}\right\}\Delta f + \left\{\Delta\varphi - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}\right\} = \varphi - \frac{\Sigma\varphi}{N}$$

dove i sommatorî s'intendono estesi a tutti e tre i cicli utilizzati.

Nelle equazioni (4) appaiono le 2 incognite Δf e $\Delta\varphi$, la prima delle quali è fissa, ma la seconda varia da una equazione all'altra. Se 48 sono le equazioni, come nel nostro caso, 49 saranno le incognite, e volendo conoscere la sola Δf, si tratta di sapere come si farà a sbarazzarsi dei 48 $\Delta\varphi$.

Qui, e non prima di qui, sembra al nostro A. che sia il caso di servirsi di una sommazione. Se si aggruppano, pensa egli, le osservazioni in

---

latitudine, fatte con un cannocchiale di Bamberg, le misure antecedenti (1912) fatte con un istrumento prestatogli dall'ufficio geodetico di Prussia, non ostante avesse di esse già rilevato « il grado di precisione non singolare » (vedi G. Bocc., *La variazione delle latitudini*, nelle Mem. d. Pontif. Acc. Rom. N. L., vol. XXXII).

medie mensili (¹) successive, abbraccianti nuovamente i 3 cicli dal giugno 1912 al gennaio 1916, e calcolata per ciascuna media l'equazione (4) corrispondente, si fa di tali equazioni la somma, i $\Delta\varphi$ dovranno mutuamente elidersi, perchè uniformemente distribuiti, e l'equazione risultante ridursi a contenere la sola incognita Δf. Questa è anche la ragione per cui l'A. omette i $\Delta\varphi$ nelle equazioni mensili.

Ora esaminiamo che cosa ci dice su questo punto l'equazione corretta (5). Supponiamo siano n le misure su cui si fonda una media mensile qualunque φ_m, cosicchè la somma di tutte le misure fatte nel mese sia $n\varphi_m$ ed addizioniamo le n equazioni (5) corrispondenti. Avremo per l'equazione mensile la forma esatta:

$$(6) \qquad n\left(C_m - \frac{\Sigma C}{N}\right)\Delta f + n\left(\Delta\varphi_m - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}\right) = n\left(\varphi_m - \frac{\Sigma\varphi}{N}\right)$$

dove C_m $\Delta\varphi_m$ e φ_m indicano i valori medî mensili di C $\Delta\varphi$ e φ. E se di equazioni come la (6) facciam nuovamente, come l'A. vuole, la somma, attraverso i 3 cicli, risulterà:

$$(7) \quad \left\{\Sigma n\, C_m - \Sigma C\,\frac{\Sigma n}{N}\right\}\Delta f + \left\{\Sigma n\,\Delta\varphi_m - \Sigma\Delta\varphi\,\frac{\Sigma n}{N}\right\} = \left\{\Sigma n\,\varphi_m - \Sigma\varphi\,\frac{\Sigma n}{N}\right\}.$$

Ma si ha pure, evidentemente:

$$\Sigma n\, C_m = \Sigma C \qquad \Sigma n\,\Delta\varphi_m = \Sigma\Delta\varphi \qquad \Sigma n\,\varphi_m = \Sigma\varphi \qquad \Sigma n = N.$$

Dunque le quantità in parentesi nella (7) sono tutte e tre identicamente nulle, e la equazione si riduce a $0 = 0$. In altre parole, l'equazione a cui il Boccardi crede di poter ricorrere per liberarsi dei $\Delta\varphi$, *non esiste.* Boccardi non riflette che di essa equazione s'è già servito una prima volta (come sopra s'è visto) per trovare φ_0, e che non è più in sua potestà servirsene una seconda per trarne il Δf. All'eccesso illogico di sfruttamento l'equazione si sottrae dileguandosi!

Il metodo quindi che il nostro A. dice *da sè ideato* per separare l'incognita Δf dai $\Delta\varphi$ è semplicemente assurdo, una sola equazione non potendo bastare alla determinazione di due incognite.

(¹) Veramente le medie di Boccardi non sono di mese in mese, bensì per intervalli di 28 giorni, con ciò intendendo egli eliminare la forte onda lunare semimensile da lui scoperta, e della cui inesistenza ci occupammo nella nostra Nota: *Su di una pretesa, forte variazione di latitudine a breve periodo,* Rend. R. Lincei, XXVII, pag. 213.

A quella Nota si è obbiettato che vi si accordi egual considerazione a tutte le misure di latitudine dell'A., senza badare ai segni con cui egli aveva distinto dalle buone, le mediocri e le cattive. Ma anche questo è un errore. Le osservazioni *segnate* (che ben potevano, del resto, omettersi nella pubblicazione) sono *tante* che il loro effetto non può non ripartirsi equamente sulle diverse semiore. Ripeta l'A. del *Saggio* il nostro calcolo, *con esclusione di tutte le misure segnate,* e ci dica se ha veduto *venir in luce* qualche traccia di onda semimensile.

In realtà, con la sua sola equazione-somma $\Delta f\, \Sigma C = \Sigma\varphi - N\varphi_0$ l'A. non poteva trovar nè Δf nè φ_0, ma solo un valore approssimato di questa seconda incognita, mettendo l'altra a zero. Ciò in considerazione del forte coefficiente di φ_0, come si disse, e della piccolezza di Δf.

Che se nelle mani del Boccardi l'equazione-somma non s'è dileguata, è anche facile scoprire quello che egli ha fatto. Nelle equazioni mensili (6) ha egli *bravamente* soppresso il fattore n che era invece essenziale di lasciar al suo posto affinchè ogni equazione mensile concorresse nell'equazione-somma col peso o voce che le spettava. Lo ha soppresso, dico, in generale, solo lasciandolo in piedi in 5 equazioni, nelle quali gli ha dato, non meno arbitrariamente, il valore 1/2. Inoltre, trascurando $\frac{\Sigma C}{N}$ e $\frac{\Sigma \Delta\varphi}{N}$, ha mantenuto le equazioni mensili nella forma primitiva delle diurne:

$$C_m \Delta f + \Delta\varphi_m = \varphi_m - \varphi_0 . \tag{8}$$

Di queste equazioni se ne hanno, come dicevamo, 48, di cui 5 divise per 2. Chiamando φ_0' la media pesata delle 48 φ ossia $\frac{\Sigma n\, \varphi_m}{45.5}$ (dove n per 5 valori di φ_m è $= 1/2$, e per i 43 rimanenti è $= 1$) la somma di 48 equazioni come la (8), tenuto conto delle 5 divisioni per 2, darà:

$$\Delta f\, \Sigma n\, C_m + \Sigma n\, \Delta\varphi_m = \Sigma n\, \varphi_m - 45.5\, \varphi_0 = 45.5\, (\varphi_0' - \varphi_0) . \tag{9}$$

Questa è la somma erronea a cui è venuto l'A. e si vede da essa che il non-annullamento del primo membro è dipeso dalla forma della (8), ed il non-annullamento del secondo dai pesi arbitrarî dati alle equazioni mensili, in forza dei quali è intervenuto uno *sdoppiamento* assurdo tra la media generale delle misure (φ_0) e la media pesata delle medie mensili (φ_0') (1).

C'è anche da osservare che nel primo membro della (9) è venuto a figurare il termine $\Sigma n\, \Delta\varphi_m$ dove gli n son quelli assunti arbitrariamente dal Boccardi, e non i veri (proporzionali ai numeri delle osservazioni mensili), e quindi non può più il termine stesso ritenersi nullo, come lo vorrebbe l'A. in base al postulato dei $\Delta\varphi$ sinusoidali. Ciò vuol dire che se i pesi arbitrariamente dati alle equazioni mensili han salvato da zero il secondo membro dell'equazione-somma, han d'altra parte impedita quella separazione di Δf dai $\Delta\varphi$ che l'A. si lusingava di ottenere, onde l'equazione (9) è in realtà a 2 incognite, anzichè nella sola Δf: ciò che sfugge ad un lettore

(1) Del resto, anche mantenendo inalterati i primi membri delle equazioni mensili, se il Boccardi non ne avesse fissato i pesi ad arbitrio, ed in disaccordo con i numeri delle osservazioni di ciascuna, il secondo membro della equazione-somma si sarebbe sempre annullato, e l'assurdo avrebbe rivestito la forma di *auto-eliminazione delle misure*. Ciò perchè il modo come è calcolato φ_0 implica già la nullità di Δf, qualunque sia la serie di osservazioni da cui questa incognita si vuol dedurre.

non troppo attento, il Boccardi avendo sempre omesso di scrivere i termini in $\Delta\varphi$, e lasciato al lettore stesso di immaginarseli.

La divisione per 2 non ha avuto altro movente che quello d'impedire che presso 5 equazioni mensili i termini noti contrastassero troppo con i termini noti delle equazioni limitrofe. Ma quando si è creduto buono l'andamento di detti termini, non si è guardato più che tanto alla disparità del numero d'osservazioni tra l'uno e l'altro. Non mancano qua e là medie mensili non dedotte da osservazioni, ma semplicemente *interpolate*, per l'una o per l'altra stella, ed anche s'incontra una media (nov. 1912) interpolata per entrambe le stelle, alla cui equazione si è dato egual peso che alle più ricche medie!

Codesta bizzarra procedura non può non ridondar a danno dell'opera, onde è ovvio e legittimo il sospetto che le medie mensili non siano espressione genuina delle osservazioni. Saranno attenuati bensì gli errori accidentali, ma sottentrandovi più forti errori sistematici.

Le dette equazioni-somma, perfettamente, come dicevamo, illusorie, ed aventi origine in errori di calcolo, sono:

Da due cicli chandleriani (1912-1915):

$$+2.42\,\Delta f = +0''.361 \quad \text{da cui:} \quad \Delta f = +0''.149.$$

Da tre cicli (1912-1916):

$$+4.82\,\Delta f = +0''.089 \quad \text{da cui:} \quad \Delta f = +0''.018.$$

Il primo di questi Δf è sembrato all'A. inammissibile, poichè prudentemente si astiene dal risolvere la prima equazione, e solo si limita a rimarcare che da essa il Δf si determinerebbe in *cattive condizioni*, il coefficiente 2.42 essendo *troppo piccolo*! Ma il secondo, certamente perchè piccolo, non gli è parso indegno (abbenchè l'equazione da cui deriva stia nel più stridente contrasto con l'altra, pur provenendo entrambe da un materiale di osservazioni per $^2/_3$ identico) di concorrere in una media aritmetica col valore di Δf che risulterà da un secondo modo di sommazione delle equazioni mensili.

Di codesto secondo modo, non meno erroneo del primo, ci occuperemo in un'altra Nota, nella quale anche mostreremo qual sia il vero valore di Δf risultante dalle osservazioni del Boccardi, o piuttosto da quelle che egli ci presenta come medie mensili.

Fisica. — *Variazioni di resistenza del bismuto nel campo magnetico e diminuzione del coefficiente dell'effetto Hall al crescere del campo.* Nota del Corrisp. O. M. Corbino.

1. La spiegazione, in base alla teoria elettronica, delle variazioni di resistenza dei metalli nel campo magnetico ha dato luogo a numerose Memorie di varî autori. Il Drude, cui si deve la teoria più completa della conduzione elettronica fondata sulla esistenza di due specie di ioni, positivi e negativi, la cui concentrazione (numero di ioni per centimetro cubo) sarebbe funzione della temperatura, attribuì la causa dei mutamenti di resistenza a effetto galvanomagnetico longitudinale derivante dal gradiente termico trasversale prodotto dal campo (effetto Ettingshauen e Nernst). Ne risulterebbe che nessun mutamento di resistenza dovrebbe verificarsi mantenendo la lamina a temperatura costante, ciò che non è.

In una ricerca teorica sul movimento dell'elettricità in una lamina sotto l'azione del campo a temperatura costante, da me pubblicata in questi Rendiconti nel 1915 (1), fu messo in evidenza che il coefficiente di proporzionalità fra la caduta di tensione lungo una linea di flusso e la densità locale della corrente, muta per azione del campo. E poichè quel coefficiente dà una misura della resistenza specifica del conduttore, la signorina Freda, in un suo pregevole studio, espresse l'idea che la teoria elettronica dualistica può render conto, contro l'opinione del Drude, delle variazioni di resistenza osservate (2). La sconoscenza dei valori numerici delle costanti contenute nelle formule rende difficile ogni confronto quantitativo fra la teoria e l'esperienza, cosicchè si potrebbe anche dubitare che quella spiegazione si adatti veramente ai casi dei forti mutamenti di resistenza, quali sono offerti, per es., dal bismuto.

Mi sono proposto in questa Nota di riprendere in esame la questione, precisando anzitutto a quali formule effettivamente corrisponde la misura delle variazioni di resistenza nei due soli casi sperimentali in cui essa ha un significato ben definito, e ponendo in relazione queste variazioni, che come vedremo sono inseparabilmente connesse alla esistenza di due specie di ioni, positivi e negativi, con i mutamenti che subisce la costante dell'effetto di Hall al crescere del campo, mutamenti che, come è noto, sono assai rilevanti nel bismuto. Se ne dedurrà un sistema di relazioni che può permettere, col sussidio di esperienze opportunamente dirette, di determi-

(1) O. M. Corbino, Rend. Linc., XXIV, 1° sem., pag. 213; 1915.
(2) E. Freda, N. Cim.; XII, pag. 177; 1916.

nare le quattro costanti elettroniche speciali di ogni metallo, e cioè i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo, e le rispettive mobilità.

2. Mi riferirò, in quanto segue, ai simboli adottati nella mia Nota del 1915; e precisamente denotano:

N_1, N_2 il numero di ioni positivi e negativi per centimetro cubo;

v_1, v_2 le rispettive mobilità, definite come nella teoria di Drude;

e..... il valore assoluto, comune, della carica dei due ioni;

$c_0 = N_1 e^2 v_1 + N_2 e^2 v_2$ la conducibilità elettrica normale (senza campo);

H..... l'intensità del campo.

Inoltre varranno le seguenti posizioni:

$$m_1 = H e v_1 \quad , \quad m_2 = H e v_2 ;$$

$$s_1 = \frac{N_1 e^2 v_1}{1 + m_1^2} \quad , \quad s_2 = \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + m_2^2} \quad ,$$

$$s = s_1 + s_2 \quad ; \quad \varepsilon = m_1 s_1 - m_2 s_2 .$$

Per calcolare le variazioni di resistenza specifica della lamina quali risultano dalla diretta osservazione sperimentale, suppongo che nel misurare queste si proceda nel seguente modo: a due punti della lamina, alla quale la corrente accede per via di elettrodi puntiformi o estesi, sono fissate due sonde sottilissime, rilegate a un galvanometro di resistenza sufficientemente elevata per non alterare in modo sensibile la distribuzione delle correnti nella lamina. Sia V la differenza di potenziale fra le sonde ottenuta a campo nullo; e siano V′, V″ le differenze di potenziale nel caso che agisca un campo diretto, o un campo invertito. In generale V′ e V″ saranno differenti, se le sonde non stanno su una linea di flusso a campo nullo e rimasta tale dopo l'azione del campo. Fatta la media fra V′ e V″, con che si elimina l'intervento di una eventuale forza elettromotrice di Hall creata dal campo, il rapporto fra quella media e V può considerarsi come eguale al rapporto fra la resistenza specifica sotto l'azione del campo e quella a campo nullo.

Un tale procedimento conduce però a risultati definiti, cioè indipendenti dalla forma e dimensione della lamina e dalla disposizione degli elettrodi, solo nei due casi estremi, in cui, sotto l'azione del campo, restano invariate o le linee di corrente, o le linee equipotenziali; ciò che avviene rispettivamente, come dimostrò il prof. Volterra, quando gli elettrodi sono puntiformi e il contorno della lamina è perfettamente libero, o quando tutti i contorni della lamina, come nel caso dell'anello circolare, sono costituiti da elettrodi di conducibilità grandissima e perciò a potenziale uniforme.

Consideriamo infatti il primo caso (elettrodi adduttori puntiformi, e quindi invariabilità delle linee di flusso). Il campo determina una distribu-

zione del potenziale V in ciascun punto della lamina, dominata dalla equazione (4) della mia Nota citata, la quale ci dice che, detta n la direzione della normale alla linea di flusso e t quella della tangente, si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\varepsilon}{s}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Inoltre, indicando con j_t la densità di corrente lungo t si ha:

$$j_t = -\frac{s^2+\varepsilon^2}{s}\frac{\partial V}{\partial t}; \quad \text{quindi:} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2} j_t.$$

Siano (fig. 1) A e B i punti dove sono fissate le sonde, e siano *1* e *2* le linee di flusso passanti per A e B; sia *3* la equipotenziale passante

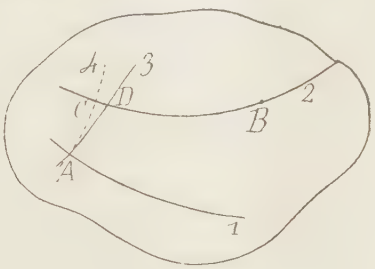


Fig. 1.

per A sotto il campo, e *4* la equipotenziale a campo nullo, normale cioè alle linee *1* e *2*. Si ha:

$$V_A - V_C = -\int_A^C \frac{\partial V}{\partial n}\,dn = -\frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}\int_A^C j_t\,dn;$$

$$V_C - V_B = -\int_C^B \frac{\partial V}{\partial t}\,dt = \frac{s}{s^2+\varepsilon^2}\int_C^B j_t\,dt;$$

e quindi:

$$V_A - V_B = -\frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}\int_A^C j_t\,dn + \frac{s}{s^2+\varepsilon^2}\int_C^B j_t\,dt.$$

Invertendo il campo, la linea *4*, lungo la quale va fatta la prima integrazione, resta invariata; e così resta invariata j_t, poichè tutte le correnti conservano la stessa direzione e anche la stessa intensità, con o senza campo, se, come supponiamo, viene mantenuta costante la corrente totale che traversa la lamina.

Si ha pertanto un semplice mutamento nel segno di ε della formula precedente, e come nuova differenza di potenziale risulta;

$$V'_A - V'_B = \frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}\int_A^C j_t\,dn + \frac{s}{s^2+\varepsilon^2}\int_C^B j_t\,dt.$$

La media delle due differenze di potenziale sarà quindi:

$$E = \frac{s}{s^2 + \varepsilon^2} \int_C^B j_t \, dt .$$

Ma a campo nullo si avrebbe:

$$V_A^0 - V_B^0 = E_0 = \frac{1}{c_0} \int_C^B j_t \, dt .$$

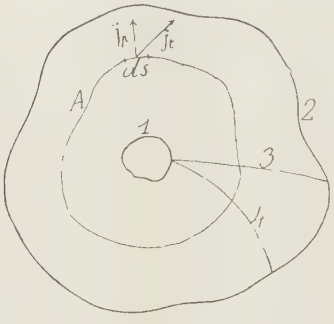


Fig. 2.

Cosicchè la grandezza che misura sperimentalmente il rapporto fra la nuova resistenza specifica e la normale, cioè $\frac{E}{E_0}$, sarà data da:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{s}{s^2 + \varepsilon^2} : \frac{1}{c_0} ;$$

cioè le cose vanno come se la conducibilità specifica c_0 avesse assunto sotto l'azione del campo il valore:

(1) $$c = \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s} .$$

3. Nell'altro caso limite in cui le linee equipotenziali restano invariate e si modificano le linee di corrente (lamina coi contorni interamente occupati da elettrodi), la variazione di conducibilità, misurata come sopra dal rapporto delle differenze di potenziale fra due punti con e senza campo a parità di corrente totale, si esprime in modo diverso che nella (1).

Siano (fig. 2) *1* e *2* i due contorni limiti a potenziale uniforme; e siano *3* e *4* le linee di corrente con e senza campo; sia infine *A* una linea equipotenziale compresa fra *1* e *2*.

La corrente totale che traversa la *A* sarà:

$$I = \int_A j_p \, ds ,$$

dove j_p è la componente normale della corrente e ds l'elemento lineare di A. Ma la linea di flusso forma con la normale n un angolo β di cui la tangente è

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varepsilon}{s};$$

e perciò, detta j_t la corrente lungo la linea di flusso:

$$j_p = j_t \cos\beta = j_t \frac{s}{\sqrt{\varepsilon^2 + s^2}}.$$

Dette j_x e j_y le componenti di corrente secondo due assi x e y, e X e Y le componenti relative del campo elettrico, si ha per le equazioni (2) della Nota citata:

$$j_x = s\mathrm{X} - \varepsilon\mathrm{Y},$$

$$j_y = \varepsilon\mathrm{X} + s\mathrm{X},$$

cioè:

$$j_x^2 + j_y^2 = j_t^2 = (s^2 + \varepsilon^2)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2).$$

Si ha quindi:

$$j_p = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} j_t = s\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}.$$

Ma se il campo non esistesse, il valore di j_p sarebbe, divenendo $s = c_0$,

$$j_p^0 = c_0 \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2},$$

supposto costante il campo elettrico, cioè la differenza di potenziale fra gli elettrodi *1* e *2*. E perciò a parità di differenza di potenziale il rapporto fra le correnti totali che fluiscono tra gli elettrodi sarà uguale al rapporto di s a c_0; o anche, a parità di corrente totale, le differenze di potenziale fra gli elettrodi staranno come $\frac{1}{s}$ a $\frac{1}{c_0}$, cioè le conducibilità relative misurate col metodo delle sonde staranno come s a c_0. Adunque, mentre nel caso di elettrodi adduttori puntiformi le differenze di potenziali fra le sonde con o senza campo si comportano come se la conducibilità varii da c_0 a $\frac{s^2 + \varepsilon^2}{s}$, nel caso di elettrodi estesi all'intero contorno quelle differenze si comportano come se la conducibilità varii da c_0 a s, subisca cioè un mutamento più forte.

Risulta da ciò che, misurando sotto l'istesso campo la conducibilità specifica nelle due diverse condizioni sovra accennate risulteranno numeri diversi, e precisamente proporzionali a s (elettrodi estesi) e a $\frac{s^2 + \varepsilon^2}{s}$ (elet-

trodi puntiformi). Siano E_c ed E_0 le differenze di potenziale fra le sonde, con e senza campo, nel caso di elettrodi estesi: sarà

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{c_0}{s}.$$

Siano E_H ed E_0 le stesse differenze con elettrodi puntiformi; sarà

$$\frac{E_H}{E_0} = c_0 : \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s}$$

da cui

$$\frac{E_c}{E_0} : \frac{E_H}{E_0} = \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{s^2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta \,(1),$$

dove β è l'angolo di cui ruotano le linee equipotenziali e le linee di flusso, per effetto del campo, a partire dalla posizione di ortogonalità. Quest'angolo è legato alla costante R dell'effetto Hall, in modo facilmente misurabile. L'ultima relazione ci dice quindi che:

La resistenza specifica del metallo muta, per effetto del campo, in misura diversa secondo che la variazione si ricerca con elettrodi adduttori estesi all'intero contorno o con elettrodi adduttori puntiformi. Il rapporto fra le due variazioni è legato in modo semplice al coefficiente dell'effetto Hall.

Questa ultima relazione è stata sottoposta a una delicata verifica quantitativa dal dott. Trabacchi, ed è stata perfettamente confermata dall'esperienza, come sarà mostrato in una prossima Nota.

4. Fermando la nostra attenzione sul caso degli elettrodi puntiformi, cui corrispondono le condizioni più facili per la misura sperimentale della variazione di resistenza, abbiamo visto che si ha:

$$\frac{E_H}{E_0} = c_0 : \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s}.$$

La variazione apparente di conducibilità sarà quindi:

$$\frac{\Delta c}{c_0} = \frac{\dfrac{s^2 + \varepsilon^2}{s} - c_0}{c_0}.$$

Il calcolo di quest'ultima espressione, in funzione delle costanti elet-

(1) Boltzmann aveva trovato una relazione solo in apparenza analoga a questa; sarebbe cioè $\frac{E_c}{E_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta$. Tale relazione del Boltzmann non fu trovata verificata nelle esperienze di Ettingshausen; nè poteva esserlo, poichè nel primo membro manca il divisore $\frac{E_H}{E_0}$ che vale all'incirca 1,6 in un campo di 10 000 unità.

troniche del metallo, può farsi agevolmente, osservando che ε/s è inferiore all'unità, e che si può quindi senza errore sensibile trascurarne, di fronte a 1, le potenze superiori a un certo grado. Posto

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{s} \tag{2}$$

e

$$c = \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s} \text{ (conducibilità sotto l'azione del campo)}$$

$$a_1 = N_1 e^2 v_1 \quad , \quad a_2 = N_2 e^2 v_2 ,$$

si ha, senza trascurare alcun termine,

$$c = s(1+\gamma^2) = \left(\frac{a_1}{1+m_1^2} + \frac{a_2}{1+m_2^2}\right)(1+\gamma^2)$$

e, osservando che

$$a_1 + a_2 = c_0$$

$$c = \frac{c_0 + a_1 m_2^2 + a_2 m_1^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}(1+\gamma^2)$$

da cui, posto:

$$b_1 = \frac{a_1}{c_0} \quad , \quad c_2 = \frac{a_2}{c_0} ,$$

si ottiene:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1 + b_1 m_2^2 + b_2 m_1^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}(1+\gamma^2) .$$

Trascurando le potenze di m_1 e m_2 dalla quarta in su, si ottiene:

$$\frac{c - c_0}{c_0} = \frac{\Delta c}{c_0} = -b_1 m_1^2 - b_2 m_2^2 + \gamma^2 .$$

Ma γ^2 può calcolarsi con la stessa approssimazione, ponendo:

$$\gamma = m_1 b_1 - m_2 b_2 . \tag{3}$$

Sostituendo ed effettuando dei facili calcoli, si ottiene:

$$\frac{\Delta c}{c_0} = -b_1 b_2 (m_1 + m_2)^2 . \tag{4}$$

Questa formula è di notevole interesse teorico, poichè prova che, *se esistesse una sola specie di elettroni e fosse pertanto* b_1 *ovvero* b_2 *eguale a zero, il metallo non presenterebbe variazioni di resistenza per effetto del campo.* Adunque, finchè si resta nell'ordine di idee preso a base da Drude per spiegare la conducibilità dei metalli, è necessario ammettere la

esistenza di entrambe le specie di ioni, positivi e negativi, se si vuole render conto dei mutamenti della conducibilità nel campo magnetico.

Se si spinge più a fondo il calcolo di γ, fino alle grandezze di ordine superiore, e precisamente fino al quarto ordine incluso, per m rispetto all'unità, si ottiene dalla (2):

$$\gamma = \frac{m_1 \frac{a_1}{1+m_1^2} - m_2 \frac{a_2}{1+m_2^2}}{\frac{a_1}{1+m_1^2} + \frac{a_2}{1+m_2^2}} = m_1 b_1 - m_2 b_2 + b_1 b_2 (m_2 - m_1)(m_1 + m_2^2)$$

E per la (4):

$$\gamma = m_1 b_1 - m_2 b_2 - (m_2 - m_1) \frac{\Delta c}{c_0}.$$

Anche questa formola contiene un risultato importante. Si osservi infatti che la grandezza γ è connessa al fenomeno Hall, poichè è la tangente dell'angolo in cui ruotano le linee equipotenziali per effetto del campo. Si ha precisamente che, indicando con R il coefficiente dell'effetto Hall:

$$\mathrm{RH} = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2}.$$

E, avendo trovato che la conducibilità sotto l'azione del campo è

$$c = \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s},$$

se ne deduce

$$\mathrm{RH}\, c = \frac{\varepsilon}{s} = \gamma,$$

cioè

$$\mathrm{R}c = \frac{\gamma}{\mathrm{H}}.$$

Si ha quindi:

$$\mathrm{R}c = \frac{\gamma}{\mathrm{H}} = e\left[b_1 v_1 - b_2 v_2 - (v_2 - v_1) \frac{\Delta c}{c_0} \right].$$

Per un campo molto debole, cui corrisponda una variazione di conducibilità $\frac{\Delta c}{c_0}$ trascurabile, il coefficiente di Hall assume un valore R_0 che si deduce dalla formola precedente applicata a questo caso, e cioè:

$$\mathrm{R}_0 c_0 = e(b_1 v_1 - b_2 v_2);$$

e pertanto

$$Rc = R_0 c_0 - e(v_2 - v_1)\frac{\Delta c}{c_0};$$

la quale stabilisce una relazione fra le variazioni del coefficiente di Hall, misurato con campi di diversa intensità, e le corrispondenti variazioni della conducibilità.

5. L'insieme delle formole trovate, tutte relative al caso della lamina a temperatura costante, fornisce il mezzo di calcolare le costanti N_1, N_2, v_1, v_2, qualora si misurino nella stessa lamina: il coefficiente di Hall per campi molto piccoli e per campi intensi, e la variazione di conducibilità specifica per effetto del campo

Si ha infatti:

$$R_0 c_0 = e(b_1 v_1 - b_2 v_2);$$

$$Rc = R_0 c_0 - e(v_2 - v_1)\frac{\Delta c}{c_0};$$

$$b_1 = \frac{N_1 v_1}{N_1 v_1 + N_2 v_2} \quad ; \quad b_2 = \frac{N_2 v_2}{N_1 v_1 + N_2 v_2} \quad ; \quad c_0 = e^2(N_1 v_1 + N_2 v_2);$$

e queste relazioni sono sufficienti per dedurre le costanti fondamentali, senza fare intervenire altre proprietà del metallo connesse con la teoria della propagazione del calore e con gli effetti Righi, Ettingshausen e Nernst. Come è noto, utilizzando le formole generali del Drude e la misura di tutti gli effetti su una stessa lamina, lo Zahn non riuscì ad ottenere un sistema di valori ammissibile per le costanti del metallo. Risultati migliori ottenne più tardi il Senepa, ricorrendo ad altre formole da me proposte; ma dovette scartare le misure sull'effetto Righi, per il quale si sarebbe dovuto ammettere un segno opposto a quello sperimentale per giungere a valori ammissibili delle costanti.

Si presenta ora la possibilità di determinare tali costanti ricorrendo a due soli fenomeni galvanomagnetici molto semplici: il fenomeno di Hall e la variazione di resistenza del metallo nel campo. L'indagine è stata eseguita, con grande perizia, dal dott. Trabacchi, e ha condotto a risultati assai soddisfacenti, come sarà mostrato in una Notà che presenterò all'Accademia in una delle prossime sedute.

Matematica. — *Geometria assoluta degli spazi curvi.* Nota I di Tommaso Boggio, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Facciamo le convenzioni seguenti: E_n, E_N sono due *spazi euclidei* ad n e N dimensioni $(3 \leq n \leq N)$; C_n è uno spazio *non euclideo* ad n dimensioni, immerso in E_N: Q è il punto generico di C_n (appartenente pure ad E_N, ma non viceversa); P è il punto generico di E_n.

Considerando i vettori infinitesimi dQ e l'operazione vettoriale $+$ in E_N, diremo che dQ è uno *spostamento infinitesimo* (un *differenziale arbitrario*) di Q in C_n, quando il punto $Q + dQ$ appartiene, oltre che ad E_N, anche a C_n. Essendo stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di C_n e quelli di E_n, e al punto $Q_1 = Q + dQ$ di C_n corrispondendo il punto P_1 di E_n, diremo che *dP è, in E_n, lo spostamento corrispondente a dQ, quando* $dP = P_1 - P$; e al dP in E_n faremo corrispondere il dQ in C_n tale che $Q + dQ$ è il corrispondente di $P + dP$.

1. Traducendo in forma assoluta il concetto analitico ordinario di *spazio curvo*, diremo che C_n è uno spazio curvo ad n dimensioni $(n \geq 3)$ quando:

A) *Esiste almeno una corrispondenza biunivoca tra i punti P di E_n e i punti Q di C_n, tale che lo spostamento (arbitrario) dP in E_n abbia per corrispondente un dQ in C_n, e tale inoltre che i varii differenziali d, δ ... di P siano tutti commutabili* (*in particolare* $d\delta P = \delta dP$).

B) *Se dQ è uno spostamento in C_n, l'elemento ds, distanza di Q da $Q + dQ$ in C_n, è pure la distanza dei medesimi punti in E_N, cioè* $ds^2 = dQ \times dQ = dQ^2$, *l'operazione* $\times$ *eseguendosi in* E_N [1].

Sia C_n uno spazio curvo, nel senso ora stabilito, individuato da una corrispondenza biunivoca [condizione A)], non importa quale, tra C_n ed E_n.

Essendo dP spostamento generico di P in E_n e dQ lo spostamento del corrispondente Q in C_n, poniamo:

$$(1) \qquad \beta = \frac{dQ}{dP}, \quad \text{e in conseguenza} \quad \beta^{-1} = \frac{dP}{dQ},$$

essendo così β un'omografia propria tra i vettori infinitesimi di E_n e quelli, pure infinitesimi, di C_n, e quindi β^{-1} omografia tra i vettori infinitesimi di C_n e quelli infinitesimi di E_n.

[1] Ciò si fa sempre per l'elemento ds di una *linea* o *superficie* ordinaria immersa in uno spazio a tre dimensioni.

Circa la teoria dei vettori ed omografie negli iperspazi, vedasi la recentissima Nota: Pensa, *Geometria assoluta dei vettori ed omografie in un S_n euclideo* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo; in corso di stampa).

Osservando che dalla (1) segue:

$$dQ \times dQ = \beta dP \times \beta dP = dP \times \mathrm{K}\beta \,.\, \beta dP,$$

e ponendo:

$$\alpha = \mathrm{K}\beta \,.\, \beta, \quad (\alpha \text{ è dilatazione, perchè } \mathrm{K}\alpha = \alpha), \tag{2}$$

per l'elemento ds di distanza si ha, da B):

$$ds^2 = dQ^2 = dP \times \alpha dP, \tag{3}$$

e quindi il quadrato dell'elemento ds in C_n si può calcolare in E_n mediante il prodotto interno di dP per αdP.

Così, e ciò è assai importante, *la metrica nello spazio curvo C_n si ottiene mediante la metrica dello spazio euclideo E_n, in base alla dilatazione α, che è data dalla corrispondenza biunivoca tra E_n e C_n che individua* [*condizione* A)] *lo spazio curvo C_n* (1). Stabilita una corrispondenza biunivoca tra E_n e C_n è determinata β, e quindi è determinata α e anche la *metrica* di C_n che, in un certo senso, per la (3), è rappresentata dalla omografia α.

2. Sia stabilita una corrispondenza biunivoca tra i P di E_n e i Q di C_n e valgano le formule precedenti. Se, corrispondentemente allo spostamento, arbitrario, dP in E_n, si calcola l'incremento $d\beta$, si presenta spontanea una omografia che definiremo, per un vettore generico $\mathbf{u}$ di E_n, e per un'omografia qualunque λ, funzione di P, ponendo:

$$\Phi_P(\lambda, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\lambda^{-1}\left\{\frac{d\lambda}{dP}\,\mathbf{u} + \mathrm{S}_P(\lambda, \mathbf{u}) - \mathrm{K}\,\mathrm{S}_P(\lambda, \mathbf{u})\right\}, \tag{4}$$

ove S è l'importante operatore binario per le omografie, dovuto al compianto M. Pieri (2). Ciò posto si ha:

$$d\beta = \beta \,.\, \Phi_P(\alpha, dP), \quad \text{od anche} \quad \frac{d\beta}{dP}\,\mathbf{u} = \beta \,.\, \Phi_P(\alpha, \mathbf{u}). \tag{5}$$

Infatti, differenziando la (2) si ha intanto

$$\mathrm{K}\beta \,.\, d\beta + \mathrm{K}(\mathrm{K}\beta \,.\, d\beta) = d\alpha\,; \tag{a}$$

poi, dalle formule [14], [12] del Pieri si trae (scrivendo per brevità S invece di S_P), badando alla (1):

$$d\beta = \mathrm{S}(\beta, dP) \quad , \quad \mathrm{K}\beta \,.\, d\beta = \mathrm{K}\beta \,.\, \mathrm{S}(\beta, dP) = \mathrm{S}(\mathrm{K}\beta \,.\, \beta, dP) - \mathrm{S}(\mathrm{K}\beta, \beta dP),$$

(1) Introdotte le coordinate in E_N, E_n, C_n, il che noi non abbiamo bisogno di fare, il $dP \times \alpha dP$ non è altro che la ordinaria *forma quadratica differenziale f*.

(2) Burali-Forti et Marcolongo, *Transformations linéaires*, n. 48 (Mattei et C.ie, Pavie, a. 1912).

quindi per la (2):

$$(b) \qquad K\beta \,.\, d\beta = S(\alpha\,,\, dP) - S(K\beta\,,\, \beta dP)\,;$$

si può dimostrare facilmente che l'ultimo termine è una dilatazione; perciò operando con K sulla (b) si ha:

$$(c) \qquad K(K\beta \,.\, d\beta) = KS(\alpha\,,\, dP) - S(K\beta\,,\, \beta dP)\,.$$

Se ora alla (a) si aggiunge la differenza fra la (b) e la (c), e si tien conto della posizione (4), si ha senz'altro:

$$K\beta \,.\, d\beta = \alpha \,.\, \Phi_P(\alpha\,,\, dP)\,;$$

operando sui due membri con $K\beta^{-1}$ e osservando che dalla (2) segue $\beta = K\beta^{-1} \,.\, \alpha$, risulta la (5).

3. Applichiamo subito la (5) alla ricerca delle linee *geodetiche* di C_n, la cui equazione differenziale è, in E_n;

$$(6) \qquad P'' + \Phi_P(\alpha\,,\, P')\, P' = 0 \qquad (P' = dP/ds)\,.$$

Come d'uso, diremo che una linea da A a B (punti fissi di C_n) è geodetica, sia in C_n, che in una varietà V_m $(m \leq n)$ immersa in C_n, quando

$$(a) \qquad \delta \int_A^B \mathrm{mod}\, dQ = 0\,.$$

Ora si ha facilmente: $\delta(\mathrm{mod}\, dQ) = (d\delta Q/\mathrm{mod}\, dQ) \times dQ$, e se prendiamo come variabile indipendente l'arco s della linea, nel qual caso $\mathrm{mod}(dQ/ds) = 1$, la (a) diviene:

$$(b) \qquad \int_A^B d\delta Q \times Q' = 0 \qquad (Q' = dQ/ds)\,.$$

Integrando per parti, la (b) risulta soddisfatta solo quando $\int \delta Q \times Q''\, ds = 0$ per δQ arbitrario in C_n, cioè solo quando

$$(c) \qquad \delta Q \times Q'' = 0\,,$$

la quale esprime anche che: *la linea da A a B è geodetica della varietà V_m immersa in C_n quando la normale principale in Q (la cui direzione è data da Q'') è normale a tutte le direzioni δQ della V_m uscenti da Q* [1].

L'equazione differenziale delle geodetiche è dunque la (c). Ora dalla (1) segue: $Q' = \beta P'$, onde $Q'' = \beta P'' + \beta' P'$, ossia, per la (5):

$$Q'' = \beta \left\{ P'' + \Phi_P(\alpha\,,\, P')\, P' \right\},$$

quindi la (c) diventa:

$$\beta\delta P \times \beta \left\{ P'' + \Phi_P(\alpha\,,\, P')\, P' \right\} = 0\,, \quad \text{onde} \quad \delta P \times \alpha \left\{ P'' + \Phi_P(\alpha\,,\, P')\, P' \right\} = 0\,;$$

[1] Questa proprietà può essere assunta per definizione, perchè le (a), (c) sono equivalenti.

ma δP è arbitrario in E_n, ed α è invertibile, quindi ne risulta la (6).

4. Esaminiamo alcune proprietà fondamentali dei simboli finora introdotti.

Operando con δ sulla $dQ = \beta dP$ si ha, per la (5):

$$(a) \qquad \delta dQ = \delta\beta \,.\, dP + \beta \,.\, \delta dP = \beta \left\{ \Phi_P(\alpha\,,\, \delta P)\, dP + \delta dP \right\},$$

e quindi risulta la formula:

$$(7) \qquad \delta dP + \Phi_P(\alpha\,,\, \delta P)\, dP = \beta^{-1}(\delta dQ)\,,$$

il cui 1° membro *non* può essere identicamente nullo per d, δ arbitrarî.

L'omografia Φ definita dalla (4) gode della proprietà notevolissima, espressa dalla formula:

$$(8) \qquad \Phi_P(\alpha\,,\, \mathbf{u})\, \mathbf{v} = \Phi_P(\alpha\,,\, \mathbf{v})\, \mathbf{u}\,, \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ vettori arbitrarî}).$$

Infatti, applicando la formula [2] del Pieri, e la proprietà, assai facile da dimostrare, espressa da $\mathrm{KS}(\mathrm{D}\gamma \,.\, \mathbf{u})\, \mathbf{v} = \mathrm{KS}(\mathrm{D}\gamma\,,\, \mathbf{v})\, \mathbf{u}$, ove γ è omografia qualunque, risulta dalla (4):

$$2\alpha\Phi(\alpha\,,\, \mathbf{u})\, \mathbf{v} = \mathrm{S}(\alpha\,,\, \mathbf{v})\, \mathbf{u} + \mathrm{S}(\alpha\,,\, \mathbf{u})\, \mathbf{v} - \mathrm{KS}(\alpha\,,\, \mathbf{u})\, \mathbf{v} = \\ = \mathrm{S}(\alpha\,,\, \mathbf{u})\, \mathbf{v} + \mathrm{S}(\alpha\,,\, \mathbf{v})\, \mathbf{u} - \mathrm{KS}(\alpha\,,\, \mathbf{v})\, \mathbf{u}\,,$$

e quindi, per la stessa (4), ne segue la (8).

Se ora nella (7) scambiamo d e δ, teniamo conto della (8), e della $d\delta P = \delta dP$ [condizione A)], si ricava subito:

$$(9) \qquad d\delta Q = \delta dQ\,,$$

cioè d e δ sono commutabili anche nel campo in cui varia Q (non lo sarebbero però i simboli d', d, δ di tre spostamenti di Q).

5. Una nuova omografia, dipendente da due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e che definiremo ponendo

$$(10) \quad \Theta(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{d\Phi(\alpha, \mathbf{u})}{dP}\, \mathbf{v} - \frac{d\Phi(\alpha, \mathbf{v})}{dP}\, \mathbf{u} + \\ + \Phi(\alpha\,,\, \mathbf{v})\, \Phi(\alpha\,,\, \mathbf{u}) - \Phi(\alpha\,,\, \mathbf{u})\, \Phi(\alpha\,,\, \mathbf{v})\,,$$

(ove, per brevità, abbiamo omesso l'indice P a Θ e a Φ), si presenta spontanea nel calcolo di $\delta d\beta - d\delta\beta$. Infatti, calcolando $\delta d\beta$ dalla (5), e sostituendo a $\delta\beta$ il valore dato dalla (5) stessa, si ha:

$$\delta d\beta = \beta\Phi(\alpha\,,\, \delta P)\, \Phi(\alpha\,,\, dP) + \beta \,.\, \delta\Phi(\alpha\,,\, dP)\,;$$

scambiando d con δ, sottraendo e tenendo conto della (10) si ottiene:

$$(11) \qquad \delta d\beta - d\delta\beta = \beta \,.\, \Theta(\alpha\,,\, dP, \delta P)\,.$$

Potendo considerarsi dP come un vettore costante, si ha, tenendo conto delle (1), (9):

$$(\delta d\beta - d\delta\beta)\, dP = \delta d(\beta dP) - d\delta(\beta dP) = \delta d dQ - d\delta dQ = \delta d^2 Q - d^2 \delta Q\,,$$

e quindi, per la (11):

$$\delta d^2 Q - d^2 \delta Q = \beta \,.\, \Theta(\alpha\,,\, dP\,,\, \delta P)\, dP\,. \tag{12}$$

6. Applichiamo ora l'omografia Θ al calcolo della curvatura di Riemann nel punto Q, e secondo una data giacitura.

Sia Σ una superficie di C_n, passante per Q, e siano $dQ\,,\, \delta Q$ due spostamenti ortogonali, tangenti a Σ in Q; allora per la curvatura $\mathcal{K}$ di Gauss di Σ in Q è noto che [1]

$$m^2 \mathcal{K} = m\,\delta\left(\frac{\delta Q \times d^2 Q}{m}\right) - m d\left(\frac{\delta Q \times d\delta Q}{m}\right), (m = \text{mod}\, dQ\,.\, \text{mod}\, \delta Q)\,. \tag{13}$$

Eseguendo le differenziazioni si ottiene:

$$m^2 \mathcal{K} = \delta Q \times \delta d^2 Q - \delta Q \times d^2 \delta Q + \tag{14}$$
$$+ [d^2 Q \times \delta^2 Q - (d\delta Q)^2] - \{\delta m\,.\, \delta Q \times d^2 Q - dm\,.\, \delta Q \times d\delta Q\}/m\,.$$

Supponiamo che la Σ sia la superficie formata dalle geodetiche di C_n uscenti da Q e tangenti ai vettori $x dQ + y \delta Q$ ($x\,,\, y$ numeri reali arbitrarî); diciamo poi $\mathbf{N}$ il vettore unitario normale a Σ in Q, ed $s\,,\, s_1$ (con s_1 funzione arbitraria di s) gli archi delle geodetiche tangenti, in Q, a dQ e δQ. Trattandosi di geodetiche, le loro normali principali in Q hanno la direzione del vettore $\mathbf{N}$, e, facendo uso delle solite notazioni, si ha:

$$\frac{dQ}{ds} = \mathbf{t}\ ,\quad \frac{d^2 Q}{ds^2} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{N}\ ,\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dQ}{ds_1}\right) = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds}\mathbf{N}\,,$$
$$\frac{dQ}{ds_1} = \mathbf{t}_1\,,\quad \frac{d^2 Q}{ds_1^2} = \frac{1}{\varrho_1}\mathbf{N}\ ,\quad \frac{d}{ds_1}\left(\frac{dQ}{ds}\right) = \frac{d\mathbf{t}}{ds_1} = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{ds_1}\mathbf{N}\,;$$

di qui risulta che l'ultimo termine della (14) si annulla e che, per la (9), il 2° termine vale $[1/(\varrho\varrho_1) - 1/(\varrho\varrho_1)]\, ds^2\, ds_1^2 = 0$.

Quindi, per la superficie geodetica Σ considerata, la (14) porge:

$$m^2 \mathcal{K} = \delta Q \times (\delta d^2 Q - d^2 \delta Q)\,,$$

e poichè si può scrivere $m^2 = dQ^2\,.\,\delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2$, si ha pure

$$\mathcal{K} = \delta Q \times (\delta d^2 Q - d^2 \delta Q)/[dQ^2\,.\,\delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2]\,. \tag{15}$$

Poichè $dQ = \beta dP$, ed $\alpha = \mathrm{K}\beta\,.\,\beta$, applicando la (12) si può dare alla (15) la forma, equivalente a quella di Riemann:

$$\mathcal{K} = \delta P \times \alpha\Theta(\alpha\,, dP\,, \delta P)\, dP/\{dP \times \alpha dP\,.\, \delta P \times \alpha \delta P - (dP \times \alpha \delta P)^2\} \tag{16}$$

La (15) vale anche quando agli spostamenti ortogonali $dQ\,,\, \delta Q$ si sostituiscano spostamenti qualunque, esprimibili linearmente mediante i dQ e δQ ortogonali ora considerati.

[1] Burali-Forti, *Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie* ecc., n. 42 (Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIII, 1° sem., 1912).

Matematica. — *Classe derivata di una funzione.* — Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Siano: u una classe di numeri reali relativi contenente più di un elemento; f il simbolo di una funzione numerica, monodroma, definita nel campo u e che applicata ad un qualsiasi elemento di u produce un numero reale relativo: x un elemento di u appartenente pure alla classe derivata, ∇u, di u (1).

Se per y elemento generico della classe formata dagli u diversi da x, cioè della classe $u - \iota x$, poniamo

$$[1] \qquad \varphi y = (fy - fx)/(y - x),$$

(1) Per comodo del lettore, e per non lasciare dubbî sulla natura dell'ente nuovo che intendo definire, riporto le definizioni di alcuni enti fondamentali già noti, valendomi delle notazioni logico-ideografiche del *Formulario* di G. Peano, con le leggiere modificazioni che ho introdotto nella 2ª ediz. del mio Manuale Hoepli, *Logica Matematica*, in corso di stampa e di prossima pubblicazione.

Unendo, somma logica, alla classe q dei numeri reali relativi gli elementi $+\infty$, $-\infty$ si ottiene la classe

$$(0) \qquad \mathrm{q}^* = \mathrm{q} \cup \iota(+\infty) \cup \iota(-\infty).$$

Di una classe $\boldsymbol{u}$, non vuota, di q se ne deve considerare il *limite superiore*, $\mathrm{l}'\boldsymbol{u}$; il *limite inferiore*, $\mathrm{l}_1\boldsymbol{u}$; la *classe limite generale*, $\Lambda\boldsymbol{u}$; la *classe derivata generale*, $\nabla\boldsymbol{u}$, e si ha:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'\,q} \,.\, \exists u \,.\, \therefore \mathrm{O}_u \,.\, \therefore$$

$$(1) \qquad \exists \{ u = (u - \mathrm{Q}) \} : \mathrm{O} : \mathrm{l}'u \,.\equiv.\, \iota \{ \mathrm{q} \cap x \ni (x - \mathrm{Q} = u - \mathrm{Q}) \}$$

$$(1') \qquad - \exists \{ u = (u - \mathrm{Q}) \} : \mathrm{O} : \mathrm{l}'u \,.\equiv.\, +\infty$$

$$(2) \qquad \exists \{ u = (u + \mathrm{Q}) \} : \mathrm{O} : \mathrm{l}_1u \,.\equiv.\, \iota \{ \mathrm{q} \cap x \ni (x + \mathrm{Q} = u + \mathrm{Q}) \}$$

$$(2') \qquad - \exists \{ u = (u + \mathrm{Q}) \} : \mathrm{O} : \mathrm{l}_1u \,.\equiv.\, -\infty$$

$$(3) \qquad \Lambda u \,.\equiv.\, \mathrm{q}^* \cap x \ni \exists \,[\mathrm{Cls'}\, u \cap v \ni \{ \exists v : x = \mathrm{l}'v \,.\, \cup \,.\, x = \mathrm{l}_1 v \}]$$

$$(4) \qquad \nabla u \,.\equiv.\, \mathrm{q}^* \cap x \ni \{ x \varepsilon \Lambda (u - \iota x) \} \,.$$

Per una funzione f definita nel campo u, ed essendo x un elemento di ∇u, se ne deve considerare « la classe dei valori limiti di f quando la variabile *varia* in u e *tende* ad x », $\mathrm{Lim}(f, u, x)$, e, se esiste, il « limite della funzione f quando la variabile *varia* in u e *tende* ad x », $\lim(f, u, x)$, e si ha:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'} \cap \mathrm{Cls'\,q} \,.\, f \varepsilon \mathrm{Ops}(u, \mathrm{q}) \,.\, x \varepsilon \nabla u \,.\, \therefore \mathrm{O}_{u,f,x} \,.\, \therefore$$

$$(5) \qquad \mathrm{Lim}(f, u, x) \,.\equiv.\, \mathrm{q}^* \cap a \varepsilon \{ v \varepsilon \mathrm{Cls'\,q} \,.\, \exists v \,.\, x - \varepsilon \nabla v \,.\, \mathrm{O}_v \,.\, a \varepsilon \Lambda f'(u - \iota x - v) \}$$

$$(6) \qquad \mathrm{Lim}(f, u, x) \varepsilon \mathrm{Cls}_1 \,.\, \mathrm{O} \,.\, \lim(f, u, x) \equiv \iota \,\mathrm{Lim}(f, u, x) \,.$$

Il $\lim(f, u, x)$, limite ordinario, esiste quando la classe limite, $\mathrm{Lim}(f, u, x)$, contiene un solo elemento (è una Cls_1), il che si verifica quando coincidono il limite superiore ed inferiore della classe $\mathrm{Lim}(f, u, x)$ che, lo si noti bene, *esiste sempre*.

Per le proprietà degli enti (1)-(6) e per la completa ed esatta analisi delle varie accezioni del concetto di *limite*, si consulti il *Formulario* già citato e i lavori fondamentali del Peano indicati nel tomo V, del 1906, a pag. 215.

φ è una funzione, dipendente da f, u, x, e definita nel campo degli u diversi da x che, come d'uso, chiamasi « rapporto incrementale di f nel campo u per il valore x ».

Essendo x un elemento della « classe derivata degli u diversi da x », $\nabla(u - \iota x)$, possiamo considerare la classe, sempre esistente, dei « valori limiti di φ quando la variabile *varia* nel campo degli $u - \iota x$ e *tende* ad x », cioè la classe

[2] $$\operatorname{Lim}(\varphi, u - \iota x, x).$$

È appunto la classe [2], ente che finora non è stato considerato esplicitamente, che intendiamo definire e che proponiamo di chiamare « classe derivata di f nel campo u per il valore x » e indicare col simbolo composto *completo*

[3] $$\operatorname{Cls} D(f, u, x).$$

Se la classe [3], o la [2] che equivale, contiene *un solo elemento*, questo è la *ordinaria* « derivata di f nel campo u per il valore x », che si indica col simbolo composto *completo*,

[4] $$D(f, u, x).$$

Esprimendo in simboli si ha

$$u \varepsilon \operatorname{Cls}' \cap \operatorname{Cls}' u \,.\, f \varepsilon \operatorname{Ops}(u, q) \,.\, x \varepsilon u \cap \nabla u : \mathfrak{I}_{u,f,x} :$$

[5] $$\operatorname{Cls} D(f, u, x) \,.\equiv.\, \operatorname{Lim}\left\{ \frac{fy - fx}{y - x} \,\middle|\, y, u - \iota x, x \right\}$$

[6] $$\operatorname{Cls} D(f, u, x) \varepsilon \operatorname{Cls}_1 : \mathfrak{I} : D(f, u, x) \cdot \equiv \cdot \exists \operatorname{Cls} D(f, u, x),$$

e queste forme simboliche fanno vedere chiaramente la necessità (*omogeneità* della definizione) degli indici f, u, x per la *classe derivata* e per la *derivata* ordinaria, quando esiste.

Nelle ipotesi fatte, la $\operatorname{Cls} D(f, u, x)$ *esiste sempre*; se essa ha *un solo elemento*, cioè il suo limite superiore coincide col suo limite inferiore, allora, e solo allora, esiste la ordinaria $D(f, u, x)$. Quindi la frase comune « la f manca di derivata nel campo u per il valore x » si riduce a questa: « la $\operatorname{Cls} D(f, u, x)$, sempre esistente, contiene più di un elemento, è una Cls' »; vale a dire le funzioni mancanti, nel senso ordinario, di *derivata*, sono quelle per le quali la $\operatorname{Cls} D(f, u, x)$, sempre esistente, contiene più di un elemento.

Definita così la $\operatorname{Cls} D(f, u, x)$ se ne possono studiare le proprietà, certo numerose ed interessanti, e che, indubbiamente, devono semplificare assai le

ricerche sulle funzioni mancanti di ordinaria derivata (1). Ma io non posso compiere tale lavoro. Posso, peraltro, e voglio, esprimere un vivo desiderio.

Il libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (2) del compianto Maestro U. Dini, contiene resultati bellissimi e di grande importanza scientifica, resultati che sono poco noti e che sarebbe, non solo utile, ma doveroso, per onorare la memoria del grande Maestro, esporre di nuovo, valendosi delle attuali forme che hanno tanto semplificato il linguaggio ed eliminate alcune ipotesi restrittive (3). La Cls $D(f, u, x)$ ha come *limite superiore* e *inferiore* ciò che il Dini chiama, nel campo delle derivate, *estremi oscillatori*. Ora è facile vedere come si devono esprimere sotto forma molto semplice gli importanti teoremi del Dini valendosi della Cls $D(f, u, x)$, sempre esistente, e che, in speciali condizioni, dà pure l'ordinaria $D(f, u, x)$ quando questa esirte.

Possa qualche giovane valente e volenteroso accogliere l'invito che ho fatto; sarò lieto di aver contribuito, molto indirettamente, ad onorare la memoria del grande Maestro.

Meccanica. — *Su certi problemi dinamici sul piano.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In una Memoria inserita nel vol. II, serie II, an. 1857, pp. 113-140, del Giornale di Liouville, il Bertrand stabilì che, pel movimento di un punto libero in un piano, sono possibili integrali primi (lineo-frazionarii nelle componenti x', y' della velocità) della forma (4)

$$(1) \qquad \alpha = (Py' + Qx' + R)(Ay' + Bx' + C)^{-1} \qquad (\alpha \text{ cost. arb.})$$

se P, Q, R, A, B, C sono le seguenti funzioni delle coordinate x, y del punto (5):

$$(2) \qquad P = k + lx \;,\; Q = g - lx \;\;;\;\; A = k' + l'x \;,\; B = g' - l'x$$

(1) Si può collegare con alcuni miei precedenti lavori: *Sulle classi derivate a destra e a sinistra* (Atti Acc. Torino, vol. XXIX, a. 1894); *Sul limite delle classi variabili* (Ibidem, vol. XXX, a. 1895); *Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles...* (Math. Annalen, B. 47, a. 1895).

(2) Edito a Pisa dalla Tipografia Nistri e C. nel 1878.

(3) Alcuni, ma non molti, dei risultati ottenuti dal Dini, si trovano nel *Formulario* di G. Peano ridotti alle forme moderne più semplici di quelle che si sono presentate per le prime nel grande lavoro della ricerca delle *basi* del calcolo differenziale.

(4) Cfr. § VII, pp. 131-136 ove è cercato se possono esistere integrali di tale forma con $P, Q, \ldots$ funzioni delle sole coordinate del punto.

(5) Cfr. § VIII, pp. 137-140 dove si cerca quali sono i problemi corrispondenti agli integrali della forma (1) nelle ipotesi (2). (3). Su questo soggetto comparve nel mese di

$$(3)\qquad \begin{cases} R = (G'y - K'x + L')\,(G''y - K''x + L'')^{-1} \\ C = (Gy - Kx + L)\,(G''y - K''x + L'')^{-1} \end{cases}$$

ove g, k, l ; g', k', l' ; g'', k'', l'' sono costanti da scegliere arbitrariamente, e G, K, L ; G′, ... ; G″ ... sono rispettivamente i minori complementari di $g, k, \ldots$ nel determinante

$$(4)\qquad H = \begin{vmatrix} g & k & l \\ g' & k' & l' \\ g'' & k'' & l'' \end{vmatrix}.$$

In tale ipotesi, lo stesso Bertrand stabilì che il movimento ha luogo sotto l'azione di forze le cui componenti X, Y secondo gli assi sono

$$(5)\qquad X = \frac{H(l''x + k'')}{(G''y - K''x + L'')^3} \quad ; \quad Y = \frac{H(l''y - g'')}{(G''y - K''x + L'')^3}\ (1),$$

rilevando pure che fra X ed Y ha luogo la relazione (che qui scriviamo in forma intiera) immediata

$$(6)\qquad X(l''y - g'') - Y(l''x + k'') = 0\,;$$

dalla quale si deduce *senz'altro* che *i movimenti in discorso, nella ipotesi di* $H \neq 0$ (2), *sono movimenti che hanno luogo sotto l'azione di forze centrali col centro di forza nel punto*

$$(7)\qquad x_0 = -k'' : l'' \quad , \quad y_0 = g'' : l''$$

---

giugno scorso (fasc. 11°, pag. 391 di questi medesimi Rend.) una Nota col titolo: *Problemi dinamici a due variabili che ammettono* ecc. del dott. De Cristoforo. Ciò che era già, da tempo, a noi noto in relazione all'argomento, l'importanza dei rapporti di esso con i problemi classici di moto libero per sezioni coniche quali vengono qui messi in rilievo ed altri motivi di carattere puramente scientifico, spiegano l'origine della presente comunicazione (in due brevi Note) che venne redatta sin dal mese di agosto 1918. Circa le (2), (3) si osservi poi che, nelle formule date dal Bertrand, compaiono le lettere B, D, D′ che noi abbiamo creduto sostituire con l'', $-g''$, $-k''$ per motivi di simmetria, e per evitare il duplice significato della B.

(1) Nelle espressioni delle X, Y quali si trovano date dal Bertrand in fine della Memoria, comparisce il fattore $(K'x - G'y + L')^3$ che, evidentemente, è superfluo. Inoltre, è da notarsi che, nella espressione di X, al posto di $Bx + D'$, deve figurare $Bx - D'$, e che, per accordare la relazione fra X ed Y con le (17), (18) del Bertrand, a pag. 139, occorre ancora un cambiamento di segno.

(2) Questa restrizione si presenta necessaria alla semplice ispezione delle (5) e senza di essa diversi risultati non avrebbero, nel fatto, alcun significato. L'esame esauriente del problema richiede, adunque, nel caso in cui per un integrale della forma (1), sia $H = 0$, una trattazione a parte; la quale sarà oggetto, speriamo, di una nostra ulteriore comunicazione.

se $l'' \neq 0$; *ovvero, sono movimenti sotto l'azione di forze parallele alla direzione fissa* $-g'' : k''$, *se* $l'' = 0$.

Mettendo in vista il centro di forza, ed indicando con

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

la sua distanza dal punto mobile, si vede che alla forza stessa può darsi, nel primo caso, la forma

$$F = \frac{l''H}{\sqrt{(G''^2 + K''^2)^3}} \cdot \frac{r}{p^3}, \tag{8}$$

ove p è la distanza del mobile dalla retta (presa positivamente quando il mobile e la origine sono dalla stessa parte della retta)

$$G''y - K''x + L'' = 0, \tag{9}$$

mentre, nel secondo, può scriversi

$$F = H \sqrt{\frac{g''^2 + k''^2}{(G''^2 + K''^2)^3}} \frac{1}{p^3} \tag{10}$$

Così, *i movimenti domandati circa la forma* (1) *di un integrale primo, e nella ipotesi* $H \neq 0$, *sono quelli che hanno luogo per sezioni coniche secondo la legge* (prima forma) *scoverta da Hamilton* [1], cioè *per forze direttamente proporzionali alla distanza dal centro di forza ed inversamente proporzionali al cubo della distanza da una retta fissa, nel caso in cui questa non passa per un tal centro* [2]; ovvero *sono i movimenti per forze parallele inversamente proporzionali al cubo della distanza da una retta fissa.* — Nel 1° caso le traiettorie sono coniche rispetto alle quali il centro di forza e la retta fissa sono un polo e la relativa polare; nel 2° (che può ritenersi incluso sul 1°) *le traiettorie sono coniche rispetto alle quali la retta fissa è il diametro coniugato alla direzione costante della forza*; e, in entrambi i casi, quali che siano le circostanze iniziali.

[1] Cfr. Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. III, 1846. — Alle due leggi per movimenti centrali liberi lungo sezioni coniche, oltre al nome di Hamilton, sono collegati, come è noto, quelli di Villarceau (1852), di Darboux e Halphen (1877), di Battaglini (1877) per moti liberi in generale; di Glaisher (1878), di Appel (1889-90, 1891) e di altri. — Appell informa che *tali leggi furono dedotte dall'Halphen da quelle dell'attrazione proporzionale alla distanza o inversamente proporzionale al quadrato della distanza, con una trasformazione come quella da lui adoperata* (*un'omografia*; Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 7ª serie, tomo I, pag. 89), e di cui noi discorriamo al n. 2 del presente lavoro.

[2] Infatti, se al posto di x, y nel primo membro della (9) poniamo i valori (7), troviamo $G'' g'' : l'' + K'' k'' : l'' + L'' = (G'' g'' + K'' k'' + L'' l'') : l'' = H : l'' \neq 0$ perchè $H \neq 0$ ed l'' è finito.

2. *Le due leggi rappresentate dalle* (8), (10) *furono dedotte*, nel 1889, *dall'Appell, dalla legge per forza centrale proporzionale alla distanza dal centro di forza* (1) *col mezzo dell'omografia* (non degenere)

$$(11) \qquad x_1 = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''} \quad , \quad y_1 = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

accompagnata dalla trasformazione (del tempo t nel tempo t_1)

$$(12) \qquad k dt_1 = \frac{dt}{(a''x + b''y + c'')^2} \qquad (k = \text{cost} \neq 0)$$

[la particolarità $c = c' = 0$ che introduce Appell nel caso della (8), e quella di $c = 0$ nel caso della (10) non sono essenziali, essendo in dipendenza esclusiva della scelta dell'origine e dell'asse delle y]. Infatti, identificando la matrice a dritta di (4) con la

$$(4') \qquad \begin{vmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{vmatrix},$$

e quindi H con $-\Delta$ [determinante della (4')] l'*Appell trova come trasformato del movimento sotto l'azione della forza* μr ($\mu = $ cost. ed r distanza dal centro di forza) il movimento sotto l'azione della forza

$$F_1 = \frac{\mu_1 r_1}{(G''y - K''x + L'')^3} \quad \text{con} \quad \mu_1 = -k^2 l'' \mu H^3$$

che, quando per k^2 si prenda $-1 : \mu$ (ovvero, scelta k, si trasformi la forza μr con $\mu = 1 : k^2$) coincide con la (8) [cfr. Mem. cit. dell'Appell, pag. 107, es. I]. Con la medesima identificazione, quando, oltre a $c'' = 0$ [cioè ad $f'' = 0$ se ci riferiamo alla H] sia $c = 0$, lo stesso Appell *trova* [loc. cit., pag. 118, es. III] *come forza nel moto trasformato la*

$$\frac{\mu_1}{(G''y - K''x + L'')^3} \quad \text{con} \quad \mu_1 = k^2 l'' \mu H^3$$

che, a sua volta, prendendo per k^2 il valore $\sqrt{g''^2 + k''^2} : l'\mu$ coincide con la (10). Dai risultati dell'Appell, confrontati con quelli conclusivi delle ricerche di Bertrand, si può dunque dedurre che *i problemi dinamici ai quali può competere un integrale della forma* (1) *e pei quali sia* $H \neq 0$, *sono problemi per forze centrali o per forze parallele secondo le formule* (8), (10), *e possono tutti essere ottenuti trasformando con le omografie non de-*

(1) Cfr. la Memoria *De l'homographie en Mécanique*, nell'American Journal of Mathematics, vol. XII, pag. 107, esempî I e III; nella quale trovasi pure accennato (pp. 103 e 108) quanto abbiamo testè riferito, in fine della nota (5) circa l'Halphen. — Cfr. pure, dell'Appell, l'art. *Sur les lois des forces centrales* etc., idem, vol. XIII, an. 1891, pag. 153. Questi confronti riusciranno istruttivi in relazione all'argomento di cui è oggetto il presente scritto.

generi del piano i movimenti per forze centrali proporzionali alla distanza dal centro di forza (i quali ultimi fanno parte pure essi dei movimenti del tipo).

3. Quando, per una scelta determinata delle costanti $g, k, l, \ldots$ da cui dipende l'integrale (1), il problema dinamico corrispondente (eccezion fatta, s'intende, delle condizioni iniziali) è stato determinato, l'*omografia di Appell* (11)-(12) [1] che serve a dedurlo dal moto centrale per forza proporzionale alla distanza, sarà chiamata *omografia coordinata* all'integrale (1), o al problema corrispondente; essa trasformerà le coniche concentriche che sono traiettorie nel primo problema, nelle coniche (dotate del medesimo polo, e relativa polare, nel nuovo centro di forza e nella *retta limite* del sistema trasformato) che sono traiettorie nel secondo problema, il tempo di passaggio del secondo mobile per la posizione corrispondente a quella del primo, essendo regolato dalla formula

$$t_1 = \frac{H^2}{h}\int (G''y_1 - K''x_1 + L'')\,dt,$$

Indicando con Ω_1, Ω_2 le omografie coordinate a due dei problemi del tipo, la Ω_1^{-1} trasforma il primo in un problema di moto per forza centrale proporzionatamente alla distanza; questo (con eventuale modifica della costante di proporzionalità) viene trasformato da Ω_2 nel secondo problema; dunque, dal primo problema si passa al secondo con la omografia $\Omega_1^{-1}\Omega_2$ che è, del resto, arbitraria. Se ne conclude che *tutti i problemi dinamici, cui possono competere integrali della forma* (1) *con* $H \neq 0$, *possono essere derivati da uno qualunque fra essi trasformandolo con le omografie di Appell.* In particolare, se la scelta dell'omografia coordinata ad uno dei problemi del tipo è fatta in guisa che le traiettorie nel moto trasformato abbiano il nuovo centro di forza per fuoco e, per retta limite, la direttrice corrispondente [ciò che equivale a fare la scelta delle costanti $g, k, l, \ldots$ subordinatamente alla condizione

$$\sqrt{(l'x + f'')^2 + (l''y + g'')^2} = \lambda l''(G''y - K''x + L''),$$

con $\lambda = \text{cost} =$ al prod. di $\sqrt{G''^2 + K''^2}$ per l'*eccentricità* della traiettoria], la (8) prenderà la forma

$$F = \frac{l''H\lambda^3}{r^2} = \frac{\lambda_1}{r^2}, \qquad (\lambda_1 = \text{cost.})$$

cioè la legge della forza sarà la newtoniana; e si potrà perciò enunciare:

Tutti i problemi dinamici cui può competere un integrale della forma (1) *con* $H \neq 0$, *possono essere ottenuti trasformando con le omografie di Appell* (del piano o dello spazio) *il movimento naturale dei pianeti.*

[1] Così noi proponiamo che, per brevità, venga chiamata ogni omografia del tipo (11) accompagnata dalla trasformazione (12), sia che si tratti, come qui, del piano, sia che si abbia ad operare nello spazio.

Astronomia. — *La condensazione galattica delle stelle di diversa classe spettrale.* Nota di Giovanni Zappa, presentata dal Corrispondente Vincenzo Cerulli.

Dobbiamo ritenere che il nostro sistema stellare ha la forma lenticolare, con il centro vicino al sole col piano mediano coincidente con la Via Lattea, con una distribuzione delle stelle nella regione centrale abbastanza uniforme e poi a densità decrescente. Nelle parti estreme della lente o fuori di essa addirittura sono gli ammassi che formano la Galassia. E sappiamo d'altra parte, sulla base delle velocità stellari parallattiche, che le distanze medie delle diverse classi spettrali vanno diminuendo da B a G per poi tornar a crescere, cosicchè l'ordine per distanze decrescenti è all'incirca il seguente B. M. A. K. F. G. -

In contrasto con queste due cognizioni è il risultato ottenuto da E. C. Pickering per la condensazione rispetto alla Galassia delle diverse classi spettrali. L'ordine di condensazione decrescente da lui ottenuto è l'ordine classico, quello della evoluzione, delle velocità radiali, della temperatura cioè B. A. F. G. K. M.

Le ricerche di Pickering comprendono però solo le stelle sino alla grandenza apparente 6.5 e si può pensare che le sole stelle visibili ad occhio nudo delle diverse classi spettrali non diano una buona rappresentazione della loro distribuzione. Pubblicato ora il primo volume della classificazione spettrale dell'Osservatorio di Harvard, ci parve opportuno riesaminare la questione, spingendoci sino alla $8.^{M}0$, limite che non si può varcare perchè secondo nostri scandagli solo fino ad esso si può ritenere completa quella classificazione, al di là del quale poi le lacune dell'emisfero settentrionale sono maggiori che nell'australe. Si sono prese le stelle di tutte le declinazioni comprese tra 0^{h} e $1^{h}\ 30^{m}$ di ascensione retta, le quali sono dunque in uno spicchio sferico con il cerchio massimo mediano normale alla Galassia, e si sono considerate separatamente le grandezze da 0^{M} a 6^{M}, da 6^{M} a $6^{M}.5$, da $6^{M}.5$ a $7^{M}.0$, da $7^{M}.0$ a $7^{M}.5$, da $7^{M}.5$ a $8^{M}.0$, ed anche da 0^{M} a 6^{M} a $7^{M}.0$, a $8^{M}.0$, e tutte insieme da 0 a $8^{M}.0$.

La considerazione delle stelle da 0 a $8^{M}.0$ ci ha portato all'importante conclusione che l'ordine di condensazione è il seguente: B. A. K. F. G. M. Troviamo dunque che a parte la classe poco numerosa M, già per altri fatti peculiare, l'ordine di condensazione è quello della distanza. Per la classe M è da ricordare che mentre le stelle lucenti appaiono assai lontane, e son quelle da cui deriva la distanza suddetta, le stelle deboli di cui si è considerata la parallasse, stelle a forte moto proprio è vero, appaiono ad un

terzo della distanza che risultava per la stessa categoria della classe K, cioè vicinissime a noi.

L'esame dei risultati, ottenuti per i gruppi detti sopra di grandezze apparenti, mostra che per la classe B la condensazione rispetto alla Galassia è già assai evidente nel gruppo da 0^{M} a $6^{M}.0$ e nello stesso è evidente ma minore per la A, mentre per la K compare nitida solo a partire da $7^{M}.0$ e per la F da $7^{M}.0$ risulta evidente, pur trovandosene tracce per i gruppi più lucenti. Per tutte queste classi la condensazione si fa maggiore man mano che si passa alle stelle più deboli, anzi per le classi B e A e per le stelle da $7^{M}.5$ a $8.^{M}0$ quadrupla che per quelle sino a $6^{M}.0$, più forte per la B. Per la classe G sembra che la condensazione sia per manifestarsi con l'ultimo gruppo e divenir quindi evidente al di là di $8^{M}.0$, mentre per la classe M non se ne ha proprio nessun indizio.

Dal conteggio delle stelle dei diversi tipi spettrali sino alla $6^{M}.0$, sino alla $7^{M}.0$, sino alla $8^{M}.0$ e dalla divisione del cielo in due regioni, l'una vicino alla Galassia formata dalla zona tra $+20°$ e $-20°$ di latitudine galattica, l'altra lontana, costituita dal restante cielo, risulta che presentano una distribuzione uniforme nella regione vicino alla Galassia le classi M, K, A, G e meno chiaramente F. Si ha invece nitida deficienza di stelle deboli in B, donde risulterebbe che la distribuzione delle stelle B si fa più rarefatta già nei limiti di distanza raggiunti con le stelle considerate, più rarefatta o per deficienza di individui o per minor luminosità. Fatto tanto più importante perchè si tratta di stelle assai lontane da noi. Lontano dalla Galassia si ha ancora una distribuzione uniforme o quasi per F ed anche G; per le altre classi la deficienza di stelle deboli è sensibile e sempre più nell'ordine K A M E; per B si giunge persino ad avere lo stesso numero di stelle tra le grandezze 0^{M} e $6^{M}.0$, $6^{M}.0$ e $7^{M}.0$, $7^{M}.0$ e $8^{M}.0$. Se si fa il confronto del numero delle stelle dei diversi tipi spettrali nelle regioni vicino alla Galassia e lontano da essa si trova che limitatamente alle grandezze sino a $8^{M}.0$ fuori della prima regione si trovano quasi unicamente stelle del secondo tipo di Secchi, con una proporzione di 5/6 e nella stessa proporzione per F, G, K, mentre presso la Galassia vi è quasi lo stesso numero di stelle per il primo e secondo tipo nel rapporto di 3 a 4, e più precisamente lo stesso numero per i tipi A e K, mentre per ciascuno dei tre B, F, G ve n'è la metà dei precedenti. Le stelle di M sono pochissime, lontano dalla Galassia appena 1/6 di quelle di K e vicino alla Galassia la decima parte di quelle di B, e queste tutte più deboli della $6^{M}.5$. L'andamento secondo le grandezze fa prevedere che oltre la $8^{M}.0$ almeno per un certo tratto, lontano dalla Galassia la prevalenza delle stelle del 2° tipo rispetto a quelle del 1°, e, tra queste, della classe A rispetto alla B aumenta. La stessa cosa accade sulla Galassia.

L'insieme di questi risultati conferma pienamente quanto si diceva da principio sulla struttura del nostro sistema stellare. Vi possiamo anzi

aggiungere che fino alla $8^{M}.0$ almeno, piuttosto che di una condensazione galattica si ha una rarefazione extragalattica rispetto alla distribuzione uniforme. Questa rarefazione è specialmente delle stelle del 1° tipo, ma vi partecipano anche le stelle del 2° tipo. Se ne deduce che nella regione lontano dalla Galassia siamo penetrati più profondamente rispetto al suo limite che in quella vicino. Ed è da ritenere che le stelle di $8^{M}.0$ abbiano una parallasse media per il II tipo spettrale vicina a $0''.010$, per il I a $0''.005$. Verso una parallasse di $0''.010$ comincia la rarefazione extragalattica, e per quello che possiamo dire per i risultati del presente studio e per ciò che si sa, ed è pochissimo, delle distanze medie delle stelle dei diversi tipi spettrali, tale rarefazione forse compare a distanza dello stesso ordine di $0''.010$ per i diversi tipi.

Il fondamento della teoria che vuole le stelle formate nel piano della Galassia e poi disperse cioè la condensazione decrescente nell'ordine classico da B a M, sulla base del nostro materiale appare distrutto; un nuovo più saldo potrà forse esser costrutto, con maggiori cognizioni sul nostro sistema stellare.

Un altro risultato interessante si è ottenuto calcolando la condensazione galattica per tutte le stelle di diverso tipo spettrale prese insieme, sino alle grandezze 6.0, 7.0, 8.0, valutata come rapporto tra la densità nella regione che abbiamo detto vicina alla Galassia, e quella nella regione che abbiamo detto lontana, prendendo sia le grandezze visuali, sia le fotografiche. Con le prime la condensazione è risultata 1.7 con tutte le stelle sino a 6.0, e 1.9 con tutte sino a 7.0 e 2.2 con tutte sino a 8.0; con le seconde invece rispettivamente 2.7 e 2.5 e 2.4. Dunque non soltanto risulta una condensazione diversa a seconda che si usano le grandezze visuali o fotografiche, ma il rapporto tra la condensazione con le prime e quella con le seconde va crescendo col crescere della grandezza limite delle stelle considerate.

È noto il grande divario ottenuto per la condensazione galattica da Chapman e Melotte e da Kapteyn per le stelle oltre la 10^{M}. I primi basandosi sulle grandezze fotografiche ebbero per le stelle di 14.0 come rapporto di densità tra la zona da 0° a 10° e quelle da 80° a 90° di latitudine galattica 3.9 : 1, il secondo basandosi sulle visuali (scandagli di G. Herschel) 11.5 : 1.

Ebbene se si calcola quale può essere per $11^{M}.0$ il rapporto delle due condensazioni, ricavando dai nostri numeri una relazione lineare, si ha lo stesso risultato che paragonando il risultato di Chapman e Melotte con quello di Kapteyn. Una simile estrapolazione per 6 grandezze con un materiale non abbondante, che va solo sino a $8^{M}.0$ non può avere un valore probativo; ma permette di pensare che quel divario fino ad ora non spiegato può risultare semplicemente dalla diversa combinazione delle densità delle stelle di differente tipo spettrale nella divisione per grandezze visuali o foto-

grafiche e rinunciare all'ipotesi dell'esistenza di numerose stelle deboli ossastre, o di un mezzo assorbente.

È da notare che il nostro spicchio sferico incontra la Galassia in una regione a 90° dai vertici.

Particolari e deduzioni di questa ricerca verranno pubblicati dall'Osservatorio di Collurania.

Fisica. — *Nuove ricerche intorno alla costante della legge di Stefan-Boltzmann* (1). Nota della dott. MARYA KAHANOWICZ, presentata dal Corrisp. M. CANTONE.

Procedetti a questa nuova serie di esperienze per vedere se la indipendenza del coefficiente dalla temperatura, riscontrata da me nella prima determinazione (2), si mantiene ancora nel campo delle temperature elevate. La determinazione di Coblentz (3) non è decisiva in questo senso, perchè si riferisce ad un intervallo di temperature molto limitato, compreso cioè fra 1056° e 1084° C.: quella di Valentiner (4) è dedotta in un intervallo maggiore, fra 829° e 1433° C., ma i risultati sono abbastanza discordanti e presentano un andamento sistematico; in un campo ancora più esteso furono eseguite le esperienze di Féry (5), ma nei suoi valori dedotti fra 529° e 1263° C. si nota un disaccordo eccessivo, avendosi per σ i valori estremi 6,04, 6,66. Mi sembrò perciò opportuno di intraprendere una nuova determinazione, poichè una buona verifica sperimentale della legge in esame in un grande intervallo di temperatura con un metodo unico, oltre a presentare un interesse per sè, è di un'importanza particolare in quanto può fornire un giusto criterio circa il modo di valutare le alte temperature in base alla legge di Stefan.

Nello studio particolareggiato dei varî tipi di ricevitore integrale messi finora in prova ebbi occasione di rilevare che il ricevitore integrale da me adoperato (tipo Amerio) presenta qualche vantaggio rispetto agli altri, poichè con esso si realizzano due condizioni fondamentali: l'uso di un sistema in cui l'energia elettrica e l'energia raggiante abbiano sede nello stesso conduttore, il che costituisce una condizione indispensabile per valutare esattamente la quantità di energia spesa per la compensazione, ed il raggiungimento di un potere riflettente quasi trascurabile (0,1 %). Tale ricevitore

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

(2) Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, 1917, serie 5ª, fasc. 8°, pag. 439; Nuovo Cimento, serie VI, vol. XIII, 1917, pag. 142.

(3) Bull. of the Bureau of Standards, *12*, 4, 1916, pag. 504.

(4) Ann. d. Phys., *31*, 1910, pag. 275.

(5) Compt. Rend., *148*, 1909, pag. 915.

deve quindi rispondere bene alle esigenze di una misura rigorosa dell'energia emessa dal radiatore, e poichè questo offre tutte le garenzie necessarie per l'attuazione del corpo nero, non resta che la questione riguardante la graduazione della pinza termoelettrica nell'intervallo di temperature esteso fino al nuovo limite (punto di fusione del rame).

La calibrazione dell'elemento Le Chatelier fu eseguita con un metodo suggerito dal prof. Cantone. Furono scelti come punti di riferimento le temperature di fusione dei metalli: piombo, alluminio, argento, oro e rame, dei quali nell'Istituto si aveva una discreta provvista in condizioni di grande purezza. La temperatura di fusione del piombo servì come punto di verifica della scala nella regione più bassa, in modo da poter collegare le nuove misure con quelle fatte nella prima ricerca usando un bagno ad olio e lo zolfo bollente. I metalli in forma di lamine circolari di spessore da 0,1 a 0,2 mm. e di diametro presso a poco uguale a quello del tubo interno del forno vi si introducevano con un apposito sostegno e si procurava di disporli molto vicino alla saldatura della pinza termoelettrica, e precisamente a distanza non maggiore di 2 o 3 mm. da questa, mantenendo il sistema della saldatura e della lamina nella regione centrale del forno.

Come ricevitore serviva il pirometro ottico di Féry posto a circa 130 cm. dalla bocca del forno ed aggiustato in modo da aversi l'imagine della lamina metallica da fondere sulla saldatura della pinza pirometrica. Si seguiva l'andamento del galvanometro messo in circuito colla pinza Le Chatelier e quello del galvanometro inserito nel circuito del pirometro facendo letture contemporanee ad intervalli di un minuto a cominciare da una temperatura di 30° a 40° inferiore al punto di fusione della lamina, e si riscontrava che ad un certo istante la corrente data dal pirometro passava dal regime di un lentissimo aumento ad un arresto netto o ad una variazione in senso opposto, per dare luogo dopo una diecina di secondi ad un accrescimento rapido dell'intensità ed in ultimo al ripristino del regime primitivo. Le modalità del fenomeno rispondevano, come è facile comprendere, all'arresto nella variazione della temperatura durante la fusione ed al passaggio dalla legge di emissione della lamina a quella caratteristica del fondo del forno.

Il metodo, nella sua semplicità, presenta una sensibilità notevole, in quanto che accusa l'inizio della fusione con una prontezza che non può dar origine ad alcun dubbio, se si ha cura di giungere alla fusione con un processo termico sufficientemente lento in guisa da avere sempre, mediante la pinza Le Chatelier, la temperatura della lamina in esame. Per dare un'idea della sensibilità del metodo dirò che, nel caso dell'argento, l'ago galvanometrico il quale avanzava di 3 a 4 mm. della scala durante un minuto, subì in seguito al cennato arresto un salto da 348 mm. a 360 mm., mentre la lettura fatta al galvanometro della pinza Le Chatelier accusava in questo tempo una variazione di meno di un decimo di millimetro. Ripetute espe-

rienze coi singoli metalli diedero quasi sempre valori concordanti fino al grado.

Nella rappresentazione analitica dei valori ottenuti per la graduazione della pinza in base ai punti di fusione noti, sono ritornata per l'espressione della forza elettromotrice in funzione della temperatura quasi esattamente sulla funzione di 2° grado dedotta nella prima ricerca fino a 444°, avendo ottenuto:

$$E = 126{,}7 + 7{,}238t + 0{,}002358t^2,$$

ove E denota la f. e. m. espressa in mikrovolta e t la temperatura centigrada: i coefficienti infatti differiscono leggermente da quelli trovati per la funzione fino a 444°.4, ma è da avvertire che buona parte della variazione apportata dipende dal fatto che ora si è voluto anche tener conto della resistenza della pinza. L'andamento degli errori residui, come si deduce facilmente dall'annessa tabella, presenta questo di caratteristico che fino a 444°

$t_{oss.}$	$E_{oss.}$	$t_{oss.} - t_{calc.}$	$t_{oss.}$	$E_{oss.}$	$t_{oss.} - t_{calc.}$
0,0	0,0	— 17,4	228.1	1634 3	+ 1,5
25,8	132,7	— 9,6	254,7	1851,5	+ 2,2
50.6	280,5	— 4,7	280,8	2073,8	+ 2,1
77,3	459,2	— 1,6	306,3	2303,0	+ 1,0
100,0	624,3	— 0,3	444,4	3571,1	— 1,5
125.7	815.8	+ 0,6	658.0	5664,2	— 0.7
150,8	1009,7	+ 1,1	960.9	9011,2	— 0,4
175,9	1213,0	+ 0,8	1064,0	10265,9	— 1,8
200,5	1411,8	+ 0,9	1083,0	10474,6	+ 0.3

è sistematico in conformità ad una curva di tipo sinusoidale e per le temperature superiori acquista il carattere accidentale.

Feci vedere nel primo lavoro come con un termine di 3° grado si riesca a correggere del tutto l'andamento sistematico; ora ho potuto constatare che fra 700° e 1000° un termine di 3° grado non giova per niente, giacchè volendo apportare una ulteriore correzione si toglierebbe alla funzione la forma di una serie di potenze. Epperò, siccome in questa regione gli errori sono effettivamente piccoli, e poichè d'altra parte si può ritenere che la coppia $Pt, Pt - Rh$ pur non seguendo la legge di Avenarius nella regione di massima curvatura (cioè fra 0° e 500°) si avvicina abbastanza bene a questa legge nella regione di curvatura piccola fino a 1000°, si credette di poter assumere la funzione di 2° grado avanti indicata per la misura delle temperature fra 500° e 1100°, conservando per le temperature inferiori la formola di 3° grado stabilita precedentemente.

Lavorando questa volta per lo più nella parte visibile dello spettro, col forno al rosso, ho potuto constatare che il criterio fotometrico di Lummer

circa l'uniformità della temperatura coll'apprezzamento ad occhio, è assolutamente inapplicabile nel caso del forno da me adoperato, poichè non solo si è lontani da un'uniforme illuminazione per tutta la lunghezza del tubo, ma le parti estreme per una distanza di 5 cm. ca. non diventano mai incandescenti. E che tale uniformità realmente manchi, ho verificato poi con un'esperienza rigorosa: riferendomi alla temperatura di fusione dell'argento ho riscontrato col solito metodo pirometrico, che questa avviene con una differenza di 5° rispetto all'indicazione della pinza se la lamina, invece di essere quasi addossata alla saldatura, si trova a distanza di 5 cm. da questa, e di 15° quando la distanza è di 10 cm. Bisogna però tener presente che tali risultati si ottennero durante la fase crescente della temperatura, e che la disuniformità viene ad essere certamente attenuata quando il forno si trova nello stato di regime, ma non fino al punto da non costituire una causa di errore; e d'altra parte è da notare che la piccola finestra emittente, di cui si fece uso per la determinazione di σ, porta nel fascio utilizzato una limitazione per il fatto che l'energia proviene in modo predominante dalla regione centrale, dove l'uniformità veramente esiste; quindi è da escludere che nel corso dell'esperienza non si abbia il flusso di energia raggiante completa corrispondente alla temperatura dedotta mediante la pinza Le Chatelier. Del resto l'esperienza stessa può decidere in proposito, poichè se il fascio emesso non fosse dovuto ad irradiazione per temperatura uniforme, il valore di σ dovrebbe diminuire sistematicamente col crescere di questa, in quanto che la differenza fra la temperatura virtuale del fascio e quella indicata dalla pinza dovrebbe crescere col riscaldamento del forno. Vedremo fra poco che ciò non accade.

Nelle nuove determinazioni di σ lasciai invariate le condizioni sperimentali in cui fu eseguita la prima ricerca, perchè il buon accordo dei valori ottenuti non faceva sospettare che potessero intervenire errori sistematici; presi solo questa volta anche la precauzione di annerire il tubo del forno. Inoltre dovendo valutare quantità di energia notevolmente maggiori, ho potuto servirmi di un galvanometro meno sensibile ma molto sicuro (galvanometro di Hartmann e Braun di sensibilità $5{,}852 \times 10^{-9}$ Amp. a 2 metri di distanza) pure aumentando alquanto la distanza fra le aree raggianti.

Come dimostra l'annessa tabella i valori di σ non solo non manifestano alcuna tendenza verso un andamento sistematico colla temperatura, ma presentano un accordo eccezionalmente buono, non raggiunto in nessun'altra determinazione di questo genere: i valori si aggirano intorno alla media 5,603 con scostamenti piccolissimi, avendosi come valori estremi 5,58 e 5,63.

$d = 40{,}23^{cm}$

Data	t	σ	Data	t	σ
18 ottobre 1918	465,3	$5{,}60 \times 10^{-12}$	26 ottobre 1918	1074,6	5.62×15^{-12}
» » »	840,5	5,58	29 » »	599,4	5,61
24 » »	972,5	5,62	6 novembre »	732,1	5,60
» » »	1061,6	5,61	9 » »	477,0	5,61
25 » »	854,9	5.63	11 » »	600,2	5,58
» » »	862,3	5.60	12 » »	950,2	5.60

$d = 60{,}54^{cm}$

20 novembre 1918	827,4	$5{,}58 \times 10^{-12}$	21 novembre 1918	948,0	$5{,}60 \times 10^{-12}$
» » »	959,2	5,59	» » »	1039,4	5,62

Media: $\sigma = 5{,}603$

Non ho riscontrato nei miei risultati nulla che accennasse ad un assorbimento atmosferico, il quale secondo Coblentz [1], dovrebbe ammontare a 2-3 % per un radiatore a 1000°. Le esperienze, cominciate in ottobre, quando a Napoli si hanno ancora temperature estive, e finite in novembre, quando per Napoli comincia già la stagione umida, non manifestano nessuna dipendenza dei valori di σ dallo stato igrometrico dell'aria. D'altra parte un aumento di 20 cm. nella distanza fra le aree raggianti anche questa volta non apportò nelle mie esperienze alcuna influenza sui valori di σ, per cui sarei indotta a ritenere che il mio valore sia indipendente dall'assorbimento atmosferico e che le deduzioni di Coblentz in proposito sieno dovute a circostanze particolari che intervengono nelle sue esperienze e che potrebbero derivare dalle speciali condizioni climatiche, e più probabilmente dal dispositivo sperimentale a cui egli ebbe ricorso per il suo studio. La circostanza poi che anche nell'attuale determinazione il valore medio di σ è 5,60 e non maggiore, dimostra che l'energia emessa dalla bocca del forno è indipendente dalla natura delle sue pareti, annerite o no. Pure il Coblentz trova come effetto dell'annerimento del tubo una variazione nei valori di σ che entra fra i limiti degli errori sperimentali [2].

Limitai la serie a un numero relativamente piccolo di esperienze, ma sufficiente allo scopo, sia per l'accordo eccezionalmente buono che si riscontra nei singoli valori di σ e assai migliore di quello raggiunto nella prima determinazione, sia perchè i singoli valori di σ si mantengono vicinissimi alla media 5,60, dedotta nella prima ricerca da un grande numero di risultati. E tenuto conto dell'accordo raggiunto giudicai opportuno di spingermi nei valori di σ fino alla seconda cifra decimale, mentre nella prima determinazione mi ero limitata ad una sola.

[1] Scientific Papers of the Bureau of Standards, n. 262, pag. 573.

[2] V. Coblentz, loc, cit., pag. 573.

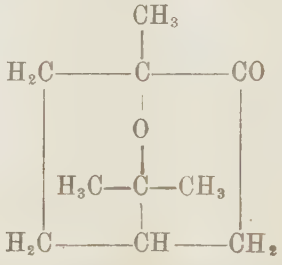
La media di tutti i valori è 5,603, e diventa 5,609 se si apporta la correzione del 0,1 % per il potere riflettente del ricevitore integrale; quindi il valore più probabile che segue dalle mie esperienze è **5,61.**

Riassumendo, sarei indotta a concludere che il valore 5,61 da me ottenuto in un intervallo di temperature (256°-1075°) a cui finora non è stata estesa nessuna determinazione e con distanze diverse fra le aree raggianti, può essere considerato come una assai soddisfacente verifica sperimentale della legge in esame, verifica la quale in fondo dimostra che il modello del forno da me posto in opera funziona veramente da corpo nero.

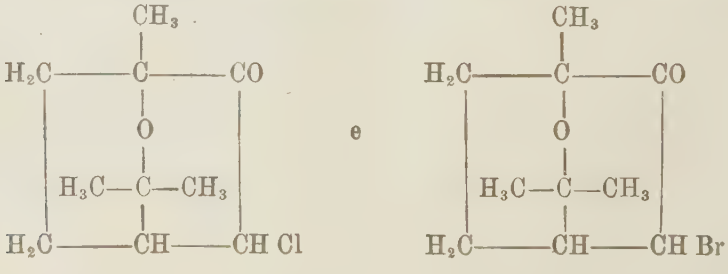
Rendo sincere grazie al prof. Cantone per i mezzi sperimentali posti a mia disposizione.

Chimica. — *Composti alogenati del cheto-cineolo* (1). Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli.

In una Nota precedente (2) si pose in rilievo l'analogia fra il comportamento chimico del chetocineolo



e quello della canfora e del pinocanfone; ma si faceva notare che l'analogia doveva trovare un limite nella stabilità relativa del ponte ossigenato. Per illustrare questo concetto si è studiata l'alogenazione del chetocineolo e si è trovato, come verrà esposto nella presente Nota, che si può introdurre in esso, con gli ordinarî metodi, un atomo di cloro o di bromo senza che la sua struttura si alteri; ma che un' ulteriore alogenazione conduce a derivati del carvomentone (tetraidrocarvone). I detti prodotti monoalogenati corrispondono alle formole

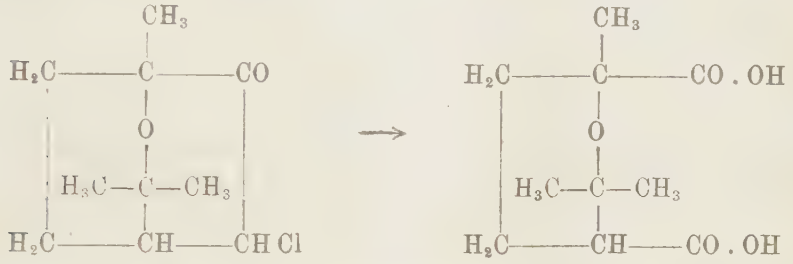


(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

(2) In corso di stampa nella Gazzetta Chimica italiana.

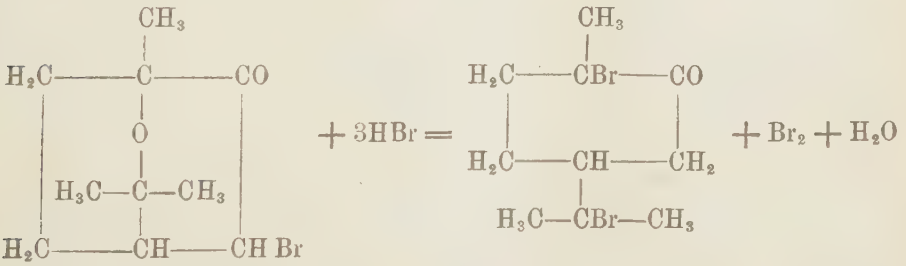
il cloro e il bromo entrano nel metilene accanto al carbonile, come avviene per la canfora, ossia la sostituzione subisce l'azione dirigente di quest'ultimo gruppo, senza essere influenzata (come poteva presumersi) dalla presenza dell'ossigeno etereo.

La struttura dei due composti si è determinata in base alla loro trasformazione in acido cineolico



che ricorda quella degli analoghi derivati della canfora in acido canforico, e si è ottenuta mediante ossidazione con soluzioni diluite di permanganato, o d'idrato potassico.

Per stabilire la struttura del monobromochetocineolo avevo tentato anche un'altra via. Riferendomi, cioè, al fatto che il chetocineolo si trasforma (1) con acido bromidrico in bibromo 1-8-carvomentone, impiegando lo stesso mezzo pensavo di poter passare dal monobromochetocineolo al tribromo 1-3-8-carvomentone, di cui tempo addietro (2) dimostrai la formola. Ma una tale reazione mi ha dato per risultato ancora il bibromo 1-8-carvomentone; in essa, quindi, non solamente si trasforma il ponte cineolico, ma si elimina, per riduzione, l'atomo di bromo dal metilene prossimo al carbonile e perciò può rappresentarsi con lo schema:



Come qui sopra ho accennato, i tentativi per introdurre un secondo atomo di bromo nel monobromochetocineolo non sono riusciti. Questo composto resiste all'alogenazione — e ciò si riscontra anche per l'α-monobromocanfora — e se si procura di determinare la reazione con l'intervento della luce o del calore, viene attaccato il ponte cineolico e si forma un tetrabromocarvomentone.

(1) Loc. cit.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXIV, serie 5ª, 2° sem., pag. 520 [1915].

Monoclorochetocineolo.

Ho preparato questo composto sia per azione diretta del cloro, sia per azione del cloruro di solforile sul chetocineolo.

1) In una soluzione di gr. 1 di chetocineolo in cc. 30 d'etere di petrolio (p. e. 38-50°) si fa sciogliere, a temperatura ordinaria e alla luce diffusa, lentamente del cloro. Il liquido assume il colore di quest'ultimo e dopo circa mezz'ora comincia a riscaldarsi e a sviluppare acido cloridrico. Fatta passare la quantità necessaria dell'alogeno, si lava la soluzione con acqua e poi si distilla il solvente. Il residuo si tratta con corrente di vapore: con l'acqua passa il monoclorochetocineolo, che cristallizza, e passa anche qualche po' di chetone inalterato, che rimane disciolto.

2) Se si vuole impiegare come clorurante il cloruro di solforile è bene agire con piccole quantità di questo e del chetone e riscaldare moderatamente il miscuglio in un palloncino per scacciare l'eccesso di cloruro di solforile. Il residuo si purifica con la solita distillazione al vapor d'acqua, mediante la quale si separa il prodotto clorurato da una piccola quantità di resina.

Il clorochetocineolo si può avere ben cristallizzato in prismi allungati splendenti, sciogliendolo a caldo nell'alcool. È solubile assai nel cloroformio, moderatamente nell'alcool, nell'etere etilico, nell'etere di petrolio, e un poco, anche nell'acqua. Fonde a 78° ed è molto stabile al calore, per cui volatilizza senza alterarsi, quando si riscalda sulla lamina di platino. Cosicchè il dosaggio dell'alogeno non riesce con il metodo di Piria: operando secondo Carius ho trovato:

Sost. gr. 0,0988: Cl Ag 0,0702; Cl % trovato 17,56, calcolato per $C_{10} H_{15} Cl O_2$ 17,48.

Mentre il chetocineolo favorisce, come la canfora, la formazione del cloruro di solforile da cloro e anidride solforosa, senza alterarsi, a — 10°, il derivato alogenico ora descritto rimane inattivo (1).

Struttura del monocloro-chetocineolo.

Per determinare la posizione del cloro in questo composto son ricorso ai seguenti processi:

1°) *Ossidazione con permanganato.* — Gr. 0,25 (1 mol.) di sostanza si riscaldano a bagno-maria, in una boccia ben chiusa, con una soluzione di gr. 0,39 (3 at. di O) di permanganato di potassio in cc. 78 di acqua. Quando, nel giro di due-tre ore la soluzione si è decolorata, si filtra e si porta a secco a bagno-maria. Il residuo si umetta con qualche goccia di acido solforico diluito; si stende su una striscia di carta da filtro; si fa es-

(1) Cusmano, questi Rendiconti, vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem. pag. 201.

siccare e, infine, si estrae con etere. L'estratto è costituito, quasi in totalità, da una sostanza cristallina, la quale fonde con sviluppo di gas, a circa 200°; sciolta nell'acqua bollente dà per raffreddamento della soluzione bei cristalli incolori trasparenti, e si riconosce per *acido cineolico* per le proprietà e per diretto confronto con un campione di questo composto.

2°) *Ossidazione con alcali diluiti.* — Gr. 1 (1 mol.) di clorochetocineolo e gr. 0,6 (2 mol.) di idrato di potassio si sciolgono in un miscuglio di cc. 10 di alcool a 92 % e cc. 10 di acqua e si riscalda la soluzione a circa 70° sino a che scompaia la reazione alcalina. Allora si distilla al vapor d'acqua per eliminare qualche po' di clorochetocineolo rimasto inalterato e si concentra a bagno-maria fino a secchezza. Infine, operando come è stato descritto sotto 1) si constata che anche per mezzo degli alcali diluiti il nucleo del composto che c'interessa si apre fra il carbonile e il metilene alogenato e si arriva all'acido cineolico. Questo si forma in quantità notevole: nel saggio qui descritto se ne sono raccolti circa gr. 0,5. La sua formazione non si può spiegare con una semplice idrolisi e per il momento mi è mancato il destro di verificare se ad essa concorra l'ossigeno dell'aria o corrisponda un prodotto di riduzione.

Monobromochetocineolo.

Ad una soluzione in cc. 150 d'etere di petrolio (p. e. 38-50°) di gr. 8 (1 mol.) di chetocineolo si aggiungono cc. 2,4 (2 at.) di bromo. Si forma subito un composto oleoso di color rosso vivo, ma dopo brevi istanti, se la temperatura è di circa 20°, si ha un rapido sviluppo di acido bromidrico, gran parte del composto oleoso si discioglie e sparisce il colore. Allora si decanta la soluzione in un imbuto a rubinetto, si aggiunge ad essa il residuo oleoso disciolto in etere etilico e si lava subito con acqua per asportare l'acido bromidrico (che può reagire con il composto cercato) e, infine, si fa concentrare. Si formano bellissimi cristalli prismatici del bromochetocineolo e di essi se ne raccoglie circa lo stesso peso del chetone impiegato. Dopo l'evaporazione di tutto il solvente si ha un residuo liquido, da cui, per trattamento con il vapor d'acqua, si può asportare un altro poco di chetone bromurato. Questo si scioglie moltissimo nel cloroformio, discretamente nell'etere etilico, poco nell'etere di petrolio. Si può avere ben cristallizzato dall'alcool in cui si scioglie molto a caldo e poco a freddo. Forma cristalli prismatici incolori trasparenti; fonde a circa 90°; volatilizza per forte riscaldamento, spandendo odore di chetocineolo. Il contenuto in alogeno fu determinato con il metodo di Carius: gr. 0,1176 di sostanza dettero gr. 0,0903 di Ag Br, quindi Br % trovato 32,68, calcolato per $C_{10} H_{15} Br O_2$. 32,35.

Il monobromochetocineolo non favorisce la formazione del cloruro di solforile da cloro e anidride solforosa.

Per stabilire la sua parentela con il chetocineolo, se ne sciolse una piccola quantità in alcool e si trattò con polvere di zinco e una goccia di acido acetico, scaldando qualche minuto: si filtrò, si aggiunse idrossilammina e in breve tempo si ottenne l'ossima del chetocineolo già fatta conoscere da Cusmano e Linari (1).

La *posizione dell'atomo di bromo* fu determinata facendo agire gli alcali diluiti sul bromo-chetocineolo, come si è descritto per l'analogo derivato clorurato. Si è ottenuto anche in questo caso acido cineolico in notevole quantità; ma insieme anche un altro acido con il p. f. a circa 102°, che cristallizza bene dall'etere etilico, in cui è meno solubile dell'acido cineolico. Non contiene alogeni e non è identico con l'acido cinogenico, prodotto di decomposizione con il calore dell'acido cineolico, che possiede circa lo stesso p. f. Studierò il nuovo prodotto se potrò disporne in quantità sufficiente.

Trasformazione del monobromo-chetocineolo in bibromo-1-8-carvomentone.

Gr. 3 di bromochetocineolo si sciolgono in cc. 10 circa d'etere anidro e la soluzione si satura, a temperatura ordinaria, con acido bromidrico secco. Si lascia per circa 48 ore, in capo alle quali essa à assunto un color bruno, poi si lava con acqua e si fa concentrare in una capsula. Il residuo è costituito da una massa cristallina imbevuta da una sostanza oleosa. Lavando con alcool freddo si possono isolare i cristalli nella quantità di circa gr. 1.25: essi rappresentano il prodotto della reazione. Nell'alcool di lavaggio si riscontra del bromochetocineolo rimasto inalterato. Il nuovo composto cristallizza dall'alcool, in cui si scioglie a caldo, in laminette bianche splendenti con il p. f. a 96° e dà all'analisi (eseguita decomponendo la sostanza con Na_2CO_3 secondo Piria):

sostanza gr. 0,0860; Br 0,0437; trovato % Br. 50,86, calcolato per $C_{10}H_{16}Br_2O$, Br % 51,27.

Guidato da questi risultati confrontai il composto con un campione di dibromo-1-8-carvomentone e ne rilevai la identità.

Trasformazione del monobromochetocineolo in tetrabromocarvomentone.

Son pervenuto a questo risultato in un tentativo di preparazione di un bibromochetocineolo.

Gr. 1 (1 mol.) di monobromochetocineolo si sciolsero in cc. 2,5 di cloroformio e si aggiunsero alla soluzione cc. 3.25 (2 at.) di bromo. Il liquido rimase colorato e non si ebbe nessun accenno di reazione; perciò si espose

(1) Gazzetta Chimica Italiana, vol. XLII, parte I, pag. 1 (1912).

alla luce solare diretta, e allora, dopo qualche tempo, s'iniziò lo sviluppo dell'acido bromidrico. Cessato questo, si aggiunse etere etilico; si lavò con acqua per asportare l'idracido; e infine si mise a svaporare la soluzione in etere e cloroformio in una capsula: si ebbe un residuo cristallino con tutte le apparenze d'un miscuglio.

Con etere di petrolio (p. e. 38-70°) bollente se ne asportò la maggior parte, che risultò essere monobromochetocineolo inalterato. Il residuo si sciolse a caldo nell'alcool e, dopo il raffreddamento della soluzione, si ebbe in cristalli laminari madreperlacei un nuovo prodotto con il p. f. 143°.

Esso fu decomposto con Na_2CO_3, secondo il metodo di Piria, per determinarne il contenuto in bromo: gr. 0,0859 di sostanza dettero gr. 0,0584 di bromo, ossia 67,98 %, mentre per un tetrabromotetraidrocarvone $C_{10}H_{14}Br_4O$ si calcola Br % 68,03. Il composto è stabile alla prova del doppio legame. Mi riserbo di compiere intorno ad esso altre ricerche, per controllare questi primi risultati.

Vulcanologia. — *Esplosioni vulcaniche.* III: *Esplosivi vulcanici oltre l'idrogeno. Possibile modo d'azione degli esplosivi vulcanici.* Nota di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio C. VIOLA.

Fenomeni analoghi a quelli dovuti alla produzione del vapor d'acqua dall'idrogeno, ma con importanza assai minore, si hanno nella produzione di altri gas, come l'ossido di carbonio dal carbonio, l'acido carbonico dall'ossido, l'acido cloridrico, il solforoso, l'idrogeno solforato, ecc. Secondo Arrhenius [1] e Doelter [2] l'acido silicico ad alta temperatura può aver parte ne' fenomeni esplosivi. Pare sicuro però che un'azione importante possano averla gl'idrocarburi al momento della loro formazione e anche taluni composti azotati. Gl'idrocarburi sono accertati ne' prodotti vulcanici, e, ritenendo l'origine interna del carbonio, la sua combinazione coll'idrogeno deve essere anche causa di esplosioni. Si sa che l'etilene, un volume con tre d'ossigeno; l'acetilene, uno con nove d'aria; il gas illuminante, uno con cinque d'aria; il formeno e il metano, uno di ognuno di essi con nove e mezzo d'aria, ecc. sono esplosivi potenti in condizioni normali. Basti ricordare che la pressione da essi sviluppata arriva a 13,7 e 13,8 at, mentre è di 9,2 per la miscela di due volumi d'idrogeno con uno d'ossigeno, e che nei primi la combinazione non determina la contrazione che avviene nella seconda [3].

(1) *Kosmische Physik und zur Physik der Vulkanismus.*

(2) Sitz. Akad. Wiss. Wien, CXII, 1903, 689.

(3) Per l'acetilene la contrazione c'è, ma è piccola poichè il volume passa da 740 a 730 l. normali.

Quanto poi ai prodotti azotati è da ricordare che una certa quantità di azoto viene emessa dai vulcani insieme agli altri prodotti volatili, come fu accertato da numerosi chimici, da Bunsen a Moissan (1). Gautier (2) lo ritenne dovuto alla scomposizione degli azoturi contenuti nelle rocce ignee. Lüdeking notò il cianogeno tra i prodotti delle combustioni (3). Del resto l'azoto ha un'affinità energica pel silicio e pel titanio.

I gas che si sviluppano dalle alte regioni della lava, giunti in vicinanza della sua superficie possono determinare esplosioni non solo per *aumento brusco di volume e di tensione* dovuto alle loro reazioni, ma anche per *aumento lento di massa e di tensione* dovuto al loro accumularsi sotto le croste più o meno consolidate. Ma anche queste esplosioni debbono avvenire a piccole profondità, poichè si è visto che più in basso ancora la lava è completamente liquida. Una parte dei gas che si sviluppano dopo tali esplosioni, specialmente l'idrogeno, può non bruciare nella lava per deficienza di ossigeno, e viene a bruciare sopra di lei nelle camere rimaste sotto il turacciolo, dove questo non è a contatto con la lava, se l'ossigeno vi è sufficiente o appena vi diverrà sufficiente. Del resto tutti i gas che si sviluppano dalla lava vanno a finire in queste camere, e le loro immissioni dànno luogo ad espansioni, e spesso a vere esplosioni. Con la tensione di un cg. di vapore surriscaldato a 1000° si ottiene un lavoro sufficiente ad elevare a 10 ch. un peso di 36 cg., e se la stessa quantità di vapore è surriscaldata a 1500°, la sua tensione potrà sollevare 43,5 cg. alla stessa altezza (4).

Finora ho tacitamente ammesso che a traverso le fenditure del turacciolo avvenga una *endosmosi in grande*, per cui l'ossigeno dell'aria è assorbito, passando in parte direttamente nella lava fusa che trovasi a contatto della base del turacciolo, e in parte andando nelle camere dove tale contatto non esiste; e che contemporaneamente il vapor d'acqua e gli altri gas raccolti nelle stesse camere passino nell'atmosfera in quantità variabili col quantitativo accumulato, col rapporto delle pressioni fuori e dentro, ecc., costituendo il pennacchio dei vulcani attivi nei periodi di riposo. Ma le quantità emesse non sempre arrivano a vuotare le camere. Vi debbono essere periodi in cui i gas affluiscono in esse abondantemente, e la loro pressione, pur subendo delle oscillazioni, finisce col crescere fino a vincere i limiti di resistenza delle volte. Gli scoppii derivanti si possono sommare co' precedenti e il turacciolo è distrutto dopo un lavoro preparatorio che può durare lungamente e avere perfino soste secolari. Si arriva così alla prima fase del-

(1) C. R., vol. 135, pag. 1278, 1902.

(2) Bull. Soc. Ch., S. 3, vol. 25, pag. 403, 1901.

(3) Ann. Ch. u. Pharm. Lieb., Leipzig. u. Heidelberg, vol. 247, pag. 122, 1888.

(4) Formola di J. Vernier, $\varphi = 0{,}3337\,t + 517{,}043$ (*Note au sujet des circonstances de la destruction de la ville de Saint-Pierre, le 8 mai 1902.* Rev. du Génie, Paris, 1903, pp. 303-321).

l'eruzione, caratterizzata da esplosioni potenti e variabili per intensità e per intervalli. Quando poi l'uscita è bene aperta, l'eruzione si regolarizza nella seconda fase ad esplosioni piccole uniformi continue. L'aria giunge abbondantemente a contatto della massa fusa su cui la pressione è discesa ad una atmosfera, producendo un afflusso maggiore e più regolare dalle profondità magmatiche. I gas combustibili vengono ad esplodere nella parte alta del bagno, a grande vicinanza dalla sua superficie e appena vi giungono, quindi in piccola quantità per ogni scoppio, lacerando continuamente il velo scoriaceo che tende a formarsi dopo ogni esplosione, specialmente se la lava non è troppo basica, e producendo in essa un'agitazione continua che non permette più forti accumulazioni gassose di qualunque specie. A differenza della fase precedente l'espansione nel camino divenuto libero non subisce più la fermata che prima vi subiva.

Riepilogando, gli esplosivi vulcanici possono ridursi almeno alle categorie seguenti:

1. *L'idrogeno e gli altri gas che bruciano a contatto dell'ossigeno e si combinano comunque tra loro nell'interno della massa fusa.* Agiscono con una parte della loro energia, dove direttamente e dove indirettamente sul turacciolo, contribuendo a prepararne e produrne la rottura. E quando questa è avvenuta, il loro effetto utile è speso quasi esclusivamente nelle proiezioni della lava fusa.

2. *I prodotti delle combinazioni precedenti e i gas che non possono combinarsi tra loro, o di cui la combinazione viene impedita, o che si accumulano in siti del bagno fino a vincere la sua pressione.* Le loro esplosioni si vanno attenuando al crescere di tale pressione e la loro energia solo in parte investe il turacciolo, del quale prepara ma non produce la rottura.

3. *I gas delle due categorie precedenti che scoppiano espandendosi quando entrano nelle camere superiori alla lava e fino a quando la tensione non vi sia cresciuta di troppo.* Agiscono direttamente sul turacciolo, preparandone ma non producendone la rottura.

4. *I prodotti delle tre categorie precedenti che si raccolgono nelle camere accumulando tensione.* Agiscono direttamente sul turacciolo di cui preparano e producono la rottura, aiutati soprattutto dagli scoppii contemporanei della prima categoria.

Da quanto precede risulta che lo stesso corpo, con o senza modificazione nel suo quantitativo e nella sua composizione, specialmente nella prima fase, può servire più volte come esplosivo durante la sua ascensione dalle profondità laviche alla libera atmosfera.

La prima e, specialmente, l'ultima categoria di agenti costituiscono i fattori principali della prima fase, e la loro risultante può considerarsi come un esplosivo unico, piuttosto *lento*, che rompe più che non frantumi,

agendo con la *massa* più che con la *velocità*, con una somma di energia incomparabilmente più forte di quella della seconda fase. Una parte però di tale energia è assorbita dalle demolizioni. Si hanno così proiezioni di vecchio materiale in grandi blocchi, in frammenti minori e in ceneri. Ma a misura che l'uscita si allarga, si passa ad una fase intermedia con materiale minuto, lapilli e ceneri, in cui le provenienze da rocce anteriori sono prevalenti. Nella seconda fase spariscono interamente la terza e la quarta categoria di agenti, e sparisce la seconda quasi del tutto. Cessano in grandissima parte gli effetti di *massa* e restano prevalenti quelli di *velocità*. L'esplosivo diventa *frantumante* e il materiale emesso è coevo nella quasi totalità. Meno le esplosioni di questa fase sono superficiali e maggiore è la polverizzazione della lava che avviene a temperatura più elevata.

Allo stato delle nostre conoscenze si può concludere che due sono i fattori fondamentali del fenomeno esplosivo: il calore perduto dal nucleo terrestre, in cui si riassumeva la vecchia teoria di Fournet; e la combustione dell'idrogeno con cui pare si dovranno iniziare le nuove teorie della Dinamica dei vulcani.

Biologia. — *Esperimenti sull'accrescimento delle larve degli Anfibi anuri.* Nota di G. Cotronei, pres. dal Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste l'opuscolo del compianto Corrisp. prof. Guareschi, intitolato: *Riso e Vitamine*; il volume edito dall'Istituto delle scienze di Barcellona e contenente i: *Traballs de la Institució catalana d'Historia natural* (*1.5-16*); un volume pubblicato dall'Università di Upsala, contenente il *Carteggio di Carlo Linneo*; e finalmente una *Relazione* sull'attività dell'Ufficio Idrografico del R. Magistero delle acque del 1914, di G. P. Magrini.

Il Socio Volterra presenta un volume dal titolo: *L'origine des formes de la Terre et des Planètes* di É. Belot, e ne dà larga notizia, rilevando i pregi e la importanza di quest'opera. Lo stesso Socio fa omaggio della interessante pubblicazione del prof. S. Pivano: *Annuario degli Istituti scientifici italiani*, della quale mette in evidenza la grande utilità per la ricchezza di dati e di notizie che contiene e che l'autore raccolse con molta cura in modo da rendere il suo lavoro il più completo possibile. Su

proposta del Socio Volterra, la Classe delibera di inviare le sue congratulazioni all'autore.

Finalmente lo stesso Socio presenta i primi tre fascicoli del periodico: *L'Intesa Intellettuale*, il cui scopo è di far conoscere le istituzioni di cultura straniere nella loro costituzione, che spesso si differenzia dalle istituzioni nostrane: il Socio Volterra accenna a varî soggetti che trovansi trattati nei fascicoli apparsi sino ad ora, per dimostrare quale benefica influenza e quale utilità possa avere la nuova pubblicazione.

PERSONALE ACCADEMICO

All'aprirsi della seduta il Presidente Ròiti porge al benemerito Accademico Segretario Millosevich, oggi tornato al suo ufficio dopo lunga e gravissima malattia, in nome suo e di tutti i colleghi, le più vive ed affettuose congratulazioni unite a cordiali augurî.

Il Presidente informa la Classe della morte del Socio straniero Adolfo von Baeyer, mancato ai vivi in Monaco di Baviera il 20 agosto 1917; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Chimica*, sino dal 7 novembre 1893.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Millosevich dà comunicazione dei sottonotati elenchi di concorrenti al premio Reale per la *Fisica* e al premio *Carpi*, del 1918:

Elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Fisica*.

(Scadenza 31 dicembre 1918. — Premio L. 10.000).

1. Garbasso Antonio. 1) « Il miraggio » (st.). — 2) « Modelli per la superficie d'onda del miraggio » (st.). — 3) « Traiettorie e onde luminose in un mezzo isotropo qualunque » (st.). — 4) « Traiettorie e onde luminose in un particolare mezzo isotropo e non omogeneo » (st.). — 5) « Sopra il problema più generale dell'ottica » (in collaborazione con G. Fubini) (st.). — 6) « Sopra una vecchia esperienza di Bennet e Volta » (in collaborazione con G. Vacca) (st.). — 7) « Su la diffusione del potenziale elettrostatico nell'aria » (in collaborazione con G. Vacca) (st.). — 8) « Sopra un particolare fenomeno di diffusione » (st.). — 9) « Sopra il fenomeno di Stark-Lo Surdo » (st.). — 10) « Azione simultanea di un campo elettrico e di un campo magnetico sulla riga rossa dello spettro dell'idrogeno » (st.).

2. La Rosa Michele. 1) « Il fenomeno dell'arco cantante in un circuito privo di periodo proprio d'oscillazione » (st.). — 2) « Alcune rappre-

sentazioni grafiche ecc. » (st.). — 3) « Sulla funzione del condensatore nel rocchetto d'induzione » (st.). — 4) « Sullo spettro della luce emessa dall'arco cantante » (st,). — 5) « Trasformazioni dello spettro dell'arco elettrico cantante » (st.). — 6) Alcuni *nuovi* fatti sulla visione degli occhi astigmatici e normali, e loro interpretazione ». Nota I (st.). — 7) « Id. id. ». Nota II (st.). — 8) « Sulla probabile fusione del carbonio nell'arco cantante e nella scintilla » (st.). — 9) « Sulla fusione del carbonio per mezzo dell'effetto Joule » (st.). — 10) « Sullo spettro della luce che accompagna il riscaldamento elettrico di un bastoncino di carbone » (st.). — 11) « La distribuzione del flusso d'induzione concatenato ecc. » (st.). — 12) « La potenza specifica e la struttura spettrale nell'arco di piccola intensità » (st.). — 13) « Sulla fusione del carbonio per mezzo dell'effetto Joule » (Nota II) (st.). — 14) « Ricerche spettrali sull'arco fra carboni a piccole pressioni » (st.). — 15) « Der Aether » (st.). — 15_a) « Storia di un'ipotesi - l' ' Etere ' » (st.). — 16) « Fondamenti sperimentali del 2° principio della teoria della relatività » (st.). — 17) « Un elettroscopio a torsione per misure di radioattività » (st.). — 18) « Sul mutamento dell'attività di un campione di nitrato di uranio » (st.). — 19) « Sopra un'esperienza di confronto fra la teoria della relatività e le concezioni meccaniche sull'emissione della luce » (st.). — 20) « Ricerche di foto-elettricità sopra alcuni liquidi » (st.). — 21) « Intorno alla « relatività » nei fenomeni fisici » (st.). — 22) « Arco e Scintilla » (st.). — 23) « Arco e bagliore » (st.). — 24) « L'effetto termoelettrico nella coppia carbone-platino » (st.). — 25) « Intorno alla pretesa fusione del carbonio ottenuta da O. Lummer » (st.). — 26) « Sopra l'influenza che la natura degli elettrodi secondi può avere nelle misure di effetto Hall ». Nota I (st.). — 27) « Id. id. ». Nota II (st.). — 28) « Intorno alle cause da cui può dipendere l'influenza, che la natura degli elettrodi ». Nota III (st.). — 29) « Id. id. ». Nota IV (st.). — 30) « Sopra un eventuale mutamento delle f. e. m. di contatto ecc. ». Nota V (st.). — 31) « Potere termoelettrico e resistenza del Bismuto come funzione del campo magnetico » (ms.). — 32) « Un confronto tra la teoria elettronica dei metalli e l'esperienza. — La relazione fra potere termoelettrico e resistenza del Bismuto come funzioni del campo » (ms.). — 33) « Costituzione della materia (prolusione) » (st.). — 34) « Energia e sua conservazione » (st). — 35) « Degradazione dell'energia » (st.).

3. Majorana Quirino, 1) « Influenza del movimento di uno specchio o della sorgente sulla propagazione della luce » (st.). — 2) « Dimostrazione sperimentale della costanza di velocità della luce emessa da una sorgente mobile » (st.). — 3) « Sul secondo postulato della teoria della relatività » (st.).

4. Setti Fulgenzio Catullo. « Basi matematiche della musica e dell'armonia » (ms.).

Elenco dei concorrenti al premio *Carpi*.

(Biennio 1917-18).

1. Marini Ludovico. « Meteorologia dell'Adriatico » (ms.).

2. Palazzo Luigi. 1) « Osservazioni nella radiazione penetrante in tempo d'eclisse » (ms.). — 2) L'eclisse totale di sole del 21 agosto 1914, osservata dalla Missione Italiana in Teodosia (Crimea) » (st.).

3. Platania Giovanni. « Risultati delle osservazioni di polarizzazione atmosferica eseguite in Catania negli anni 1910-18 ».

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. Candiani. *Relazione delle esperienze sulla resistenza al moto dei solidi nell'acqua.* Pres. dal Segretario.

COMUNICAZIONI

Il Vicepresidente Rôiti ricorda la lettera seguente inviata all'Accademia dalla Società Matematica di Francia:

Paris, le 25 novembre 1918.

« *Monsieur le Président*,

« La guerre s'achève par la victoire éclatante des alliés dans le triomphe « des idées pour lesquelles ils ont si longtemps et si passionnément combattu. « L'union des coeurs, des volontés et des courages, la mise en commun des « ressources matérielles ont définitivement ruiné la plus formidable entreprise « d'hégémonie que le monde ait jamais connue.

« La société mathématique de France est heureuse d'associer sa joie à « votre joie et de vous exprimer ses cordiales et chaleureuses félicitations. Elle « espère fermement que les relations nouées pendant les grands jours tragi- « ques qui viennent de s'écouler seront solides et durables; elle saisira toutes « les occasions de les rendre plus étroites, entre des savants qu'animent au « même degré, le culte de la science et l'amour de la Patrie.

« *Le Président*:

« Maillot ».

Il Vicepresidente Ròiti dà comunicazione alla Classe della seguente risposta da lui trasmessa, a nome dell'Accademia, alla lettera nobilissima ricevuta dalla Società Matematica di Francia; il testo della risposta è accolto con vive approvazioni dall'assemblea.

« *Illustre Signor Presidente*,

« La guerra ha unito l'Italia alla Francia; la pace deve consolidare la « loro unione.

« Se nel corso dei secoli le due figlie della civiltà latina, seguendo « spesso vie diverse, hanno sparso pel mondo tanti splendori di scienza e di « arte, hanno suscitato tanti entusiasmi; procedendo oramai pel comune in- « teresse in pieno accordo, senz'ombra di rivalità, verso i comuni ideali, « immensi beneficî recheranno all'umanità tutta.

« La loro emulazione sia dunque così nobile ed affettuosa che i successi « dell'una insuperbiscano, come trionfi proprî, l'altra sorella.

« Questo fervido voto valga di risposta alla Sua commovente lettera « accolta con grande plauso dalla Classe di scienze fisiche matematiche e « naturali, che ho l'onore di presiedere.

« A. Ròiti ».

Lo stesso Vicepresidente dà poscia lettura di un indirizzo col quale la Società Adriatica di scienze naturali di Trieste, nella radiosa alba di redenzione che l'ha riunita alla grande madre patria, invia all'Accademia dei Lincei il suo caldo, reverente saluto ed esprime la speranza di una sempre crescente intimità di relazioni fra le due Istituzioni scientifiche. La Classe delibera di esprimere alla Società Triestina i suoi più vivi ringraziamenti e la sua fraterna simpatia.

Il Vicepresidente dà comunicazione di una lettera con la quale l'Istituto Veneto ringrazia l'Accademia della larga e cordiale ospitalità concessagli nel suo temporaneo trasferimento da Venezia a Roma; e di altri ringraziamenti viene informata la Classe, trasmessi dal Socio sen. prof. Enrico D'Ovidio, per la parte presa dall'Accademia alla recente di lui festa giubilare.

Il Socio Volterra anche a nome dei Colleghi Nasini, Reina, Riccò e Fantòli comunica quanto segue.

Come venne annunciato nella seduta del 3 novembre, la Commissione di organizzazione scientifica interalleata si riunì a Parigi presso l'Institut de France il giorno 26 novembre u. s. e le sedute continuarono nei giorni successivi 27, 28, 29 novembre.

In seguito agli accordi presi (secondo il deliberato dell'Accademia dei Lincei), con S. E. Villa, allora Ministro delle Armi e Trasporti, da cui l'ufficio Invenzioni e Ricerche dipendeva, vennero designati in qualità di delegati italiani alla conferenza di Parigi i Soci: Volterra, Nasini, Reina, Riccò, Fantòli.

I delegati delle altre nazioni alleate furono i seguenti:

Belgio: de la Vallée Poussin, Massart, Lecointe.

Brasile: de Carvalho.

Francia: Painlevé, Guignard, Emile Picard, A. Lacroix, Lippmann, Edmond Perrier, Roux, Haller, Bigourdan, Baillaud, Lallemand, Moureu, Flahault.

Reame unito della Gran Brettagna e Irlanda: Schuster, Jeans, Dyson, Schäfer, Frankland, Starling, Lyons, Sherrington, Knott.

Giappone: Tanakadate, Sakurai.

Polonia: Mickiewicz.

Rumenia: Hepites, Soutzo, Hurmuzesco, Mrazec, Marinesco.

Serbia; Zujovic, Petrovic.

Stati Uniti d'America; Bumstead, Carty, Durand, Flexner, Hale, Noyes

Inaugurò le sedute il Presidente dell'Accademia delle Scienze di Parigi prof. Painlevé e presiedette le riunioni il prof. Schuster.

Le risoluzioni prese alla riunione di Parigi furono le seguenti:

Risoluzioni approvate dalla Conferenza.

1°) La Commissione di studi, prevista nell'art. 4 delle risoluzioni della Conferenza di Londra, adempierà fino a nuove disposizioni all'ufficio di Consiglio internazionale di ricerche, contemplato nell'art. 6 delle risoluzioni stesse.

2°) Le Accademie o Governi rappresentati nel Consiglio internazionale avranno la facoltà di aggiungere alla loro delegazione nuovi membri appartenenti sia al Consiglio nazionale previsto all'art. 5 delle risoluzioni di Londra, sia a qualsivoglia altra organizzazione simile.

3°) Il Consiglio internazionale istituirà immediatamente un Comitato esecutivo di 5 membri, incaricati di studiare i problemi scientifici o tecnici, che gli saranno stati trasmessi dal Consiglio internazionale.

4°) Il Comitato esecutivo studierà parimenti tutti i progetti di ordine scientifico o industriale, e di carattere internazionale, contemplati all'art. 4 delle risoluzioni della Conferenza di Londra, e specialmente i progetti della creazione di nuove associazioni che gli saranno sottoposte da una delle Accademie rappresentata alla Conferenza, ovvero da un gruppo di delegati, sia di queste Accademie, sia di un Consiglio nazionale di ricerche.

A tale scopo, il Comitato esecutivo potrà entrare in relazione con gli organismi o con le persone da esso giudicate competenti in materia.

5°) Il Comitato esecutivo formerà dei Comitati speciali incaricati di studiare nei particolari la formazione delle nuove associazioni considerate nel l'art. 1° delle risoluzioni della Conferenza di Londra, come pure delle associazioni la cui creazione fosse stata decisa dalla presente conferenza. I membri di questi Comitati non saranno necessariamente membri del Consiglio Internazionale. Un Comitato speciale potrà nominare nuovi membri colla maggioranza di due terzi dei voti dei membri che lo compongono.

6°) Il Comitato esecutivo avrà il potere di convocare le riunioni del Consiglio internazionale di ricerche.

7°) Quando il Comitato esecutivo stimerà che i Consigli nazionali siano in numero sufficiente per permettere la costituzione del Consiglio internazionale definitivo, previsto dall'art. 6 delle risoluzioni di Londra, provocherà la riunione di questo Consiglio.

I membri del Comitato esecutivo rinunceranno allora alle loro funzioni.

8°) Per le organizzazioni al di fuori della competenza dei Comitati speciali già costituiti, il Comitato potrà entrare in relazione cogli organismi o con le persone meglio qualificate.

9°) Il Comitato esecutivo creerà sotto la sua direzione, un Ufficio amministrativo.

Dichiarazione di principio.

La conferenza, riconoscendo che in materia di scienza, i primi progressi sono sempre il risultato di sforzi individuali, considera come uno dei suoi compiti essenziali quello di incoraggiare tutti gli sforzi aventi per iscopo di riunire le risorse e di assicurare agli studiosi competenti la libertà di spirito necessario per il successo delle ricerche scientifiche di ordine elevato.

Disposizioni generali applicabili alla costituzione di tutte le associazioni scientifiche collegate col Consiglio internazionale delle ricerche.

1°) Potranno partecipare alla fondazione delle Associazioni scientifiche collegate col Consiglio internazionale di ricerche, ovvero aderire ulteriormente alle associazioni stesse, le nazioni seguenti:

Belgio, Brasile, Stati Uniti d'America, Francia, Regno Unito di Gran Brettagna e Irlanda, Australia, Africa del Sud, Canadà, Nuova Zelanda, Grecia, Italia, Giappone, Polonia, Portogallo, Rumenia, Serbia.

2°) Quando si è costituita una associazione, le nazioni non comprese nella enumerazione precedente, ma rientranti nelle condizioni dell'art. 1 delle risoluzioni della Conferenza di Londra, potranno eventualmente esservi ammesse, sia su loro domanda, sia su proposta di uno dei Paesi già facenti parte dell'Associazione.

Queste domande saranno sottoposte al Comitato internazionale che deciderà la loro ammissione a maggioranza di tre quarti di voti dell'insieme delle nazioni già entrate nell'associazione.

Disposizioni votate relative alla Unione astronomica.

1°) Tra le nazioni indicate nell'art. 1 delle disposizioni generali (vedi sopra), è istituita, sotto il nome di Unione astronomica, una associazione internazionale avente per oggetto il progresso generale della astronomia e delle Scienze ed arti connesse. Essa esercita principalmente la sua azione provocando e facilitando la realizzazione delle opere e dei lavori per cui è necessaria una cooperazione.

2°) L'associazione è regolata da un Comitato internazionale composto dai Delegati dei comitati nazionali relativi ad ognuna di queste nazioni formati come è detto nell'art. 3.

3°) Ogni Comitato nazionale è composto di rappresentanti di Società scientifiche e dei servizi pubblici competenti, come pure dei rappresentanti del governo. È formato per cura dell'Accademia nazionale delle scienze della nazione, o in sua mancanza, per cura del Comitato nazionale delle ricerche, ovvero di altre istituzioni nazionali.

4°) Nel Comitato internazionale, le deliberazioni sono prese a maggioranza dei membri presenti per i problemi di ordine scientifico.

Per i problemi di ordine amministrativo, e i problemi misti, il voto ha luogo per nazioni; il numero dei voti di ogni nazione essendo fissato secondo la sua popolazione, come è qui sotto indicato.

Categoria	*a)*	meno di 5	milioni	abitanti	1 voto
»	*b)*	tra 5 a 10	»	»	2 voti
»	*c)*	» 10 a 15	»	»	3 »
»	*d)*	» 15 a 20	»	»	4 »
»	*e)*	più di 20	»	»	5 »

Gli abitanti delle colonie e dei protettorati di una nazione sono calcolati nella popolazione di questa nazione secondo le indicazioni date dal proprio governo.

Al contrario, ogni *Dominion* (Africa del Sud, Australia, Canadà, ecc.) ha un numero di voti corrispondente alla sua popolazione e fissate secondo la tavola precedente.

Disposizioni approvate concernenti l'Unione geofisica internazionale.

1°) Fra gli Stati designati all'art 1. delle disposizioni generali (vedi pag. 7), è istituita, sotto il nome di Unione geofisica internazionale, una associazione avente per scopo di provocare, coordinare e facilitare, sui loro territorî rispettivi, la esecuzione di tutti i lavori di utilità generale interessanti uno dei rami della fisica del globo.

2°) L'Unione si divide in due sezioni corrispondenti ad ognuno dei rami essenziali della sua attività, cioè:

a) La sezione di geodesia coi suoi annessi, specialmente lo studio delle maree e la cartografia matematica;

b) La sezione di meteorologia alla quale sono collegate il magnetismo terrestre, la sismologia e la vulcanologia.

Ognuna di queste due sezioni, elegge il suo Ufficio di presidenza, composto di un presidente, di un vice presidente e di un segretario.

3°) L'Unione è retta da un Comitato internazionale formato dai Delegati dei comitati nazionali costituiti, allo stesso scopo, nelle diverse nazioni associate.

4°) In ogni nazione il Comitato nazionale è creato per cura dell'Accademia nazionale delle scienze, o in sua mancanza dal Governo.

Esso si compone dei rappresentanti delle Società scientifiche interessate e di Delegati, nominati dal Governo, pei i servizi pubblici competenti.

5°) Nel Comitato internazionale, le deliberazioni sono prese a maggioranza dei membri presenti per le questioni di ordine scientifico.

Per le questioni di ordine amministrativo e le questioni miste, il voto ha luogo per nazioni, il numero di voti di ogni nazione essendo fissato in base alla sua popolazione come è qui sotto indicato:

Categoria	*a)*	meno di	5	milioni	abitanti	1 voto
»	*b)*	tra 5 a	10	»	»	2 voti
»	*c)*	» 10 a	15	»	»	3 »
»	*d)*	» 15 a	20	»	»	4 »
»	*e)*	più di	20	»	»	5 »

Gli abitanti delle Colonie e dei protettorati di una nazione sono calcolati nella popolazione di questa nazione secondo le indicazioni date dal proprio governo.

Al contrario, ogni *Dominion* (Africa del Sud, Australia, Canadà, ecc.) ha un numero di voti corrispondenti alla sua popolazione e fissate secondo la tavola precedente.

A complemento di quanto sopra si è riferito conviene aggiungere quanto segue:

1°) I membri del Comitato esecutivo di cui all'art. 4, vennero eletti dalla Conferenza di Parigi nella seduta antimeridiana del 29 novembre e risultarono i signori Hale, Lecointe, Picard, Schuster, Volterra.

Adunatosi il Comitato esecutivo stesso, esso elesse a proprio presidente il prof. Picard e a segretario il prof. Schuster.

L'Ufficio amministrativo di cui all'art. 9 sarà stabilito a Londra presso il segretario prof. Schuster, Royal Society, Burlington House.

2°) La Delegazione italiana ha proposto e la Conferenza ha accettato

unanimamente di provvedere: 1° il più rapidamente possibile alla costituzione di una legislazione internazionale dei brevetti: 2° alla istituzione di delegati scientifici (attachés) presso le diverse nazioni alleate che si occupino di questioni tecniche e scientifiche.

Riguardo a queste proposte le esperienze fatte durante la guerra, sia rispetto ai brevetti sia rispetto agli *attachés* scientifici, che difatti esistettero e funzionarono con buoni risultati presso i varî uffici di invenzione dei paesi alleati, dànno sicuro affidamento che esse potranno condurre a risultati utili e concreti.

3°) Gli studi relativi alle dette proposte vennero deferiti al Comitato esecutivo che ha stabilito di consultare, a tal fine, le persone e gli uffici che riterrà competenti.

Inoltre la Delegazione italiana ha raccomandato di attribuire per quanto è possibile al Consiglio nazionale di ciascun paese le funzioni di consulenza tecnica e scientifica delle amministrazioni pubbliche.

4°) Il socio Fantòli diede lettura di una comunicazione, la cui disamina venne deferita al Comitato esecutivo.

In questa memoria si espongono alcune osservazioni sul tema di una *cooperazione tecnica internazionale*, dalla quale restano esclusi a termini della Dichiarazione di Londra (Vedi pag. 2) la grande maggioranza dei popoli dei cessati imperi centrali, tedeschi in prima linea e loro satelliti; e si propone uno studio inteso a promuovere:

a) la costituzione di Unioni internazionali obbligatorie tra le associazioni nazionali tecniche consimili e tra i grandi laboratorî tecnici specializzati (organi di analisi tecnica);

b) la fondazione di un Istituto internazionale di documentazione e bibliografia tecnica (organo di sintesi tecnica).

Si osserva che l'attuale ordinamento di documentazione tecnica internazionale esistente nei Paesi dell'Intesa non risponde nemmeno ai più rudimentali bisogni dell'informazione tecnica, e che d'altronde si impongono una maggiore conoscenza reciproca dei tecnici dei varii paesi ed una cooperazione dei medesimi, con opportuna suddivisione del lavoro, per evitare perdite gravi di tempo, di pensiero e di esperienza tecnica.

Tali Unioni si dovrebbero costituire:

a) tra associazioni aventi carattere nazionale (già esistenti attualmente o da promuovere per le [illegible]ioni esterne, nei paesi dove esistano più associazioni regionali affini) atte ad integrare e rappresentare perciò l'attività di un paese associato in una direzione determinata della tecnica, come ad esempio, Unioni delle Società nazionali di ingegneri (Ingegneri civili, Ingegneri meccanici, Ingegneri miniere); Unioni dei Corpi d'Ingegneri

di Stato (Genio civile, Genio militare, Genio marittimo); Unioni dei Servizi nazionali delle acque (Servizi idrografici, servizi idrometrici, servizi di utilizzazione); Unioni di Associazioni elettrotecniche nazionali; Unioni di Società idrotecniche; Unioni di Associazioni industriali esercenti d'impianti idraulici, ecc.

b) tra i grandi laboratorî affini specializzati, che possono essere in numero maggiore di uno per ogni nazione.

Gli obblighi delle Unioni e degli Associati singoli dovrebbero essere: Scambio delle pubblicazioni; Redazione, su pubblicazioni degli altri paesi, di un riassunto conveniente, pronto e regolare (talora anche con traduzioni parziali o integrali) da diffondersi tra le associazioni regionali ed il pubblico del paese; Servizio di informazione reciproca; Facoltà di discussione per corrispondenza sui periodi nazionali; Intesa del Comitato direttivo di ciascuna Unione per lo studio eventuale delle questioni capitali di tecnica scientifica o d'economia industriale; Attribuzione eventuale del lavoro di ricerca e di esperimento; Organizzazione dei Congressi internazionali.

Le Unioni potrebbero contribuire ad alimentare, come organo di sintesi, un Istituto internazionale di documentazione e di bibliografia tecnica, da costituirsi con sede stabile e sul tipo dell'Istituto internazionale di agricoltura, per provvedere non solo all'Annuario tecnico internazionale, ma anche ad altre forme di informazione e di bibliografia tecnica periodica.

5°) La Conferenza nominò un Comitato per la cooperazione internazionale in chimica: questo Comitato riuscì così costituito: Prof. Haller Presidente, Professori Frankland, Nasini, Noyes, Sakurai, membri.

Il Comitato tenne varie sedute a Parigi e presentò un progetto da esaminarsi dal Comitato esecutivo del Consiglio internazionale, progetto sul quale riferì verbalmente a Londra, ai professori Hale e Schuster, il professor Nasini.

Le questioni principali che si prospettano in questo progetto sono: prima di tutto la modificazione della attuale Associazione internazionale delle Società chimiche. Si propone intanto lo scioglimento dell'Associazione e la restituzione al donatore, Ernesto Solvay, delle somme che egli aveva posto a disposizione della Associazione stessa. Inoltre si propone la creazione di un Comitato internazionale di chimica, il cui scopo deve essere di provocare e di secondare delle iniziative aventi il fine di una cooperazione internazionale nel campo della chimica, così p. es. per la pubblicazione dei resoconti sommarî dei lavori di chimica; per la pubblicazione di trattati generali di consultazione, come il Beilstein, il Gmelin, di tabelle di costanti, per la organizzazione di congressi internazionali, per la revisione dei pesi atomici, per lo studio delle questioni di nomenclatura etc. etc.

6°) Oltre la istituzione della Unione astronomica e di quella geo-

fisica e geodetica, venne proposta dai delegati Hurmuzeco, Lippmann e Volterra la istituzione di una Unione fisica, ispirata agli stessi criterî secondo i quali sarà trattata l'analoga questione per la chimica. Questa proposta sarà pure presa in considerazione dal Comitato esecutivo.

7°) La Commissione di zoologia ed anatomia dell'Accademia delle scienze di Parigi propose la istituzione di un Ente interalleato per lo studio di questioni relative alle pesche marittime e di una Commissione interalleata per le questioni di oceonografia, nonchè la modificazione della Commissione ufficiale attualmente esistente per la protezione della natura e la fondazione di pubblicazioni bibliografiche interalleate in sostituzione di quelle tedesche.

8°) I delegati del Belgio, del Brasile, della Polonia, della Rumenia e della Serbia hanno presentato, e la Conferenza ha approvato la proposta, della nomina di tre Commissioni, incaricate di riferire al Comitato esecutivo: la prima sullo studio dell'insieme del servizio degli scambi internazionali, specialmente per quanto riguarda: *a)* gli scambi delle pubblicazioni delle accademie e delle istituzioni analoghe tra di loro; *b*) il prestito delle opere conservate nelle biblioteche pubbliche o eventualmente delle fotografie di opere rare; la seconda sullo studio dell'internazionalizzazione dei grandi laboratorî attualmente esistenti o in via di formazione ed eventualmente la creazione di nuovi laboratorî organizzati internazionalmente, p. es. nel campo della fisica, della chimica e della biologia; la terza sulla raccolta dei programmi universitarî dei paesi alleati e lo studio *comparativo* di essi.

9°) Uno dei problemi che maggiormente interessò la Conferenza fu quello della bibliografia al fine di potere avere il più presto possibile degli organi centrali pubblicati dalle nazioni alleate che dessero notizia delle opere che vengono pubblicate nelle diverse lingue e nei varî rami scientifici.

Le proposte presentate in proposito sono riassunte in alcuni *Principî direttorî per la bibliografia* formulati dai signori Flahault, Guignard, Massart, Edmond Perrier, secondo i quali:

I. Le raccolte più indispensabili sono:

a) quelle di riassunti, pubblicati con la massima rapidità possibile,

b) annuarî coi sunti classificati, sostituibili con indici sistematici molto particolareggiati nei quali lo stesso lavoro apparirebbe in ognuna delle categorie alle quali si riferisce.

II. Per facilitare la pubblicazione dei riassunti, si potrebbe imporre ad ogni autore di aggiungere al suo lavoro un sommario particolareggiato, con indicazione delle pagine.

III. Si dovrebbero utilizzare per quanto è possibile le raccolte bibliografiche già esistenti nei paesi alleati e neutri invece di fondarne delle nuove.

IV. Si dovrebbero accettare in ogni raccolta sunti in inglese, in francese ed in italiano.

V. La Conferenza dovrebbe nominare delle Commissioni distinte, una per ogni scienza, incaricate di esaminare tutti i problemi relativi alla pubblicazione di raccolte bibliografiche.

È intanto a conoscenza che per la fisica le Società americana, francese ed italiana sono già venute ad accordi che condurranno presto a risultati concreti. Per l'astronomia nel prossimo anno comparirà un periodico apposito a cui contribuiranno americani, francesi, inglesi ed italiani; esso comprenderà anche la parte geodetica.

Per la parte biologica i presenti al Congresso costituirono una Commissione che prese subito in esame l'analoga questione: la Commissione risultò costituita dei signori Massart, Perrier, Starling, Flexner e Flahault.

Il delegato Belga sig. Massart presentò un elenco delle raccolte bibliografiche relative alle Scienze matematiche, fisiche e naturali, che esistevano al principio della guerra.

Le raccolte elencate sono di cinque specie:

A) Cataloghi di titoli di opere. Il principale di questi cataloghi è il « International Catalogue of Scientific Litterature » pubblicato dalla Società Reale di Londra, dal 1902. Consta di un volume speciale per ogni scienza.

B) Raccolte di sunti, nelle quali le opere sono riassunte di mano in mano vengono pubblicate.

C) Annuarî, nei quali i sunti sono classificati metodicamente.

D) Monografie, nelle quali i varî problemi sono messi a giorno da specialisti.

E) Raccolte di dati e notizie: cataloghi di specie animali o vegetali (con, ovvero senza descrizione), tavole di Costanti, descrizione di nuovi corpi ecc.

Una delle principali difficoltà che si incontrerà per creare nuove raccolte bibliografiche, sarà quella di trovare il personale adatto alla redazione dei sunti. D'altra parte, nelle raccolte esistenti, i sunti non riflettono sempre esattamente le idee dell'autore, ed insistono spesso su particolari accessori, a danno dei punti principali. Questi due inconvenienti sparirebbero se ogni autore scrivesse in testa al suo lavoro un sommario, abbastanza particolareggiato, con l'indicazione anche delle pagine.

10°) La Conferenza prese in considerazione e trasmise per l'esame al Comitato esecutivo due note del sig. Otlet, presentate dal sig. Lecointe e relative ai voti emessi rispettivamente dall'Unione delle Associazioni internazionali e dall'Istituto internazionale di bibliografia di Bruxelles.

Tali voti si riassumono nel desiderio che sia data alla bibliografia ed alla documentazione un'organizzazione d'insieme basata sui principî della

cooperazione, della coordinazione, dell'universalità e dell'internazionalizzazione.

11°) La conferenza espresse l'avviso che debbano le osservazioni della variazione di latitudine essere ridotte sotto il controllo di persona competente specialista, che i piccoli errori sistematici di osservazione e le particolarità del moto del polo (da essere sottoposti a discussione ed elaborazione ulteriore) siano dedotti da un accurato esame dei dati originali, e che i risultati della riduzione vengano pubblicati dall' Ufficio centrale o nel paese dove viene eseguita la riduzione sotto il controllo dell' Ufficio centrale.

12°) La conferenza nominò una Commissione d'astronomia incaricata di preparare la costituzione dell' Unione astronomica internazionale e la Commissione stessa, adunatasi il 29 novembre 1918, presenti i signori Baillaud, Bigourdan, Deslandres, Dyson, Hale, Lecointe, Riccò, Schuster, propose l'ordine del giorno per la prima assemblea costitutiva dell' Unione astronomica internazionale, da tenersi appena le circostanze lo permetteranno e possibilmente in coincidenza colle riunioni dell'Assemblea generale costitutiva dell' Unione geofisica internazionale.

Il detto ordine del giorno comprende le questioni amministrative (Statuto definitivo, Finanziamento, Commissioni eventuali, Elezioni dei membri del Comitato) e le questioni scientifiche (Ufficio internazionale dell'ora, Ufficio centrale dei telegrammi astronomici, Riassunto dei lavori astronomici più recenti, Effemeridi, Carta fotografica del cielo, Unione solare).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 gennaio 1919.

Belot E. — L'origine des formes de la terre et des planétes. Paris, 1918. 8°; pp. I-XII, 1 209.

Guareschi I. — Riso e vitamine (Estr. dal « Supplemento annuale all'Enciclopedia di chimica », vol. XXXIV; pp. 26-143). Torino, 1918. 8°.

L'Intesa intellettuale, anno I, nn. 1, 2, 3. Bologna, 1918.

Linné (von) E. — Bref och Skrifvelser. S. I, vol. I. Upsala, 1916. 8°; pp. I-VIII, 1-430.

Machado V. — Urosemiologia clinica. Lisboa, 1916. 8°, pp. 1-89.

Magrini G. P. — Relazione sull'attività dell'Ufficio idrografico del R. Magistrato delle acque durante il 1914. Venezia, 1916. 8°, pp. 1-112.

Pivano S. — Annuario degli Istituti scientifici italiani. Grottaferrata, 1918. 8°; pp. I-XIV, 1-516.